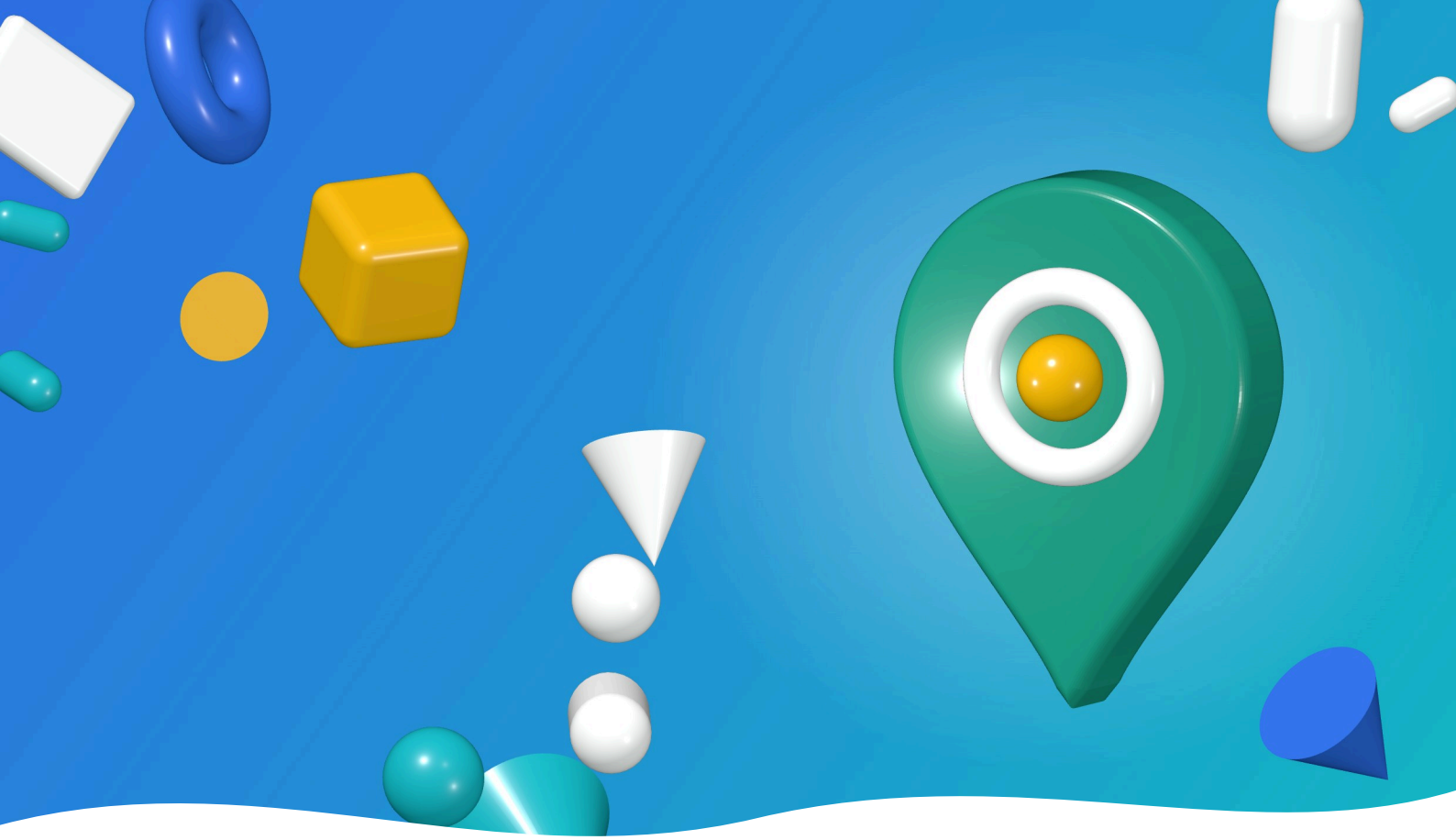


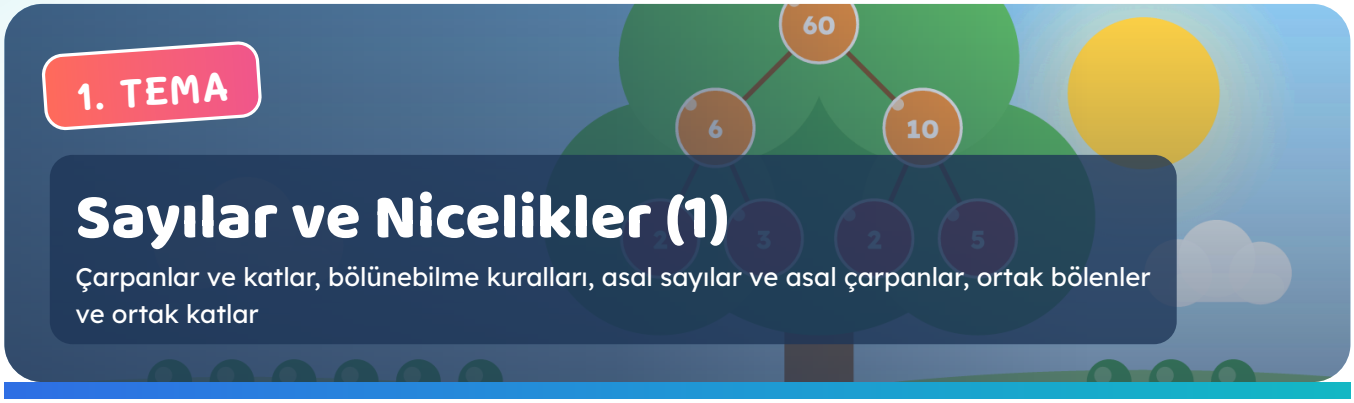
6. Sınıf

Matematik

1. Tema: Sayılar ve Nicelikler (1)

1. Dönem 1. Ortak Yazılı · Genel Tekrar

Talim Noktası
5 · 6 · 7. SINIF DERS KİTAPLARI



1. TEMA

Sayılar ve Nicelikler (1)

Çarpanlar ve katlar, bölünebilme kuralları, asal sayılar ve asal çarpanlar, ortak bölenler ve ortak katlar

Bu temada neler var?

1 Çarpanlar: Bir Sayının Yapı Taşları 2
2 Katlar ve Çarpan–Kat İlişkisi 5
3 10, 5, 2 ve 4 ile Bölünebilme 7
4 3, 9 ve 6 ile Bölünebilme 9
5 Asal Sayılar ve Asal Çarpanlar 11
6 Ortak Bölenler: Eşit Paylaştırma 14
7 Ortak Katlar: Buluşma Anları 16

Bir bahçıvan fidanlarını eşit sıralara dizer. Bir fırıncı simitleri tepsilere eşit sayıda yerleştirir. Limandaki iki fener ara ara aynı anda yanar. Bütün bu durumların arkasında aynı matematik vardır: **çarpanlar ve katlar**. Bu temada sayıların içindeki bu düzeni keşfedeceksiniz.

Anahtar kavramlar

çarpan · bölen · kat · bölünebilme · asal sayı · asal çarpan · çarpan ağacı · Eratosten kalburu · ortak bölen · ortak kat · aralarında asal

1 Çarpanlar: Bir Sayının Yapı Taşları

MERAK KAPISI

Ozan, okulun serasındaki 18 saksı fesleğeni rafa dizecek. Her sırada eşit sayıda saksı olacak ve hiçbir saksı dışarıda kalmayacak. Ozan “Saksıları ancak 3 ya da 6 sıra yapabilirim.” diyor. Defne ise “Bence daha çok seçenek var.” diye düşünüyor. **Sizce kim haklı? Kaç farklı diziliş yapılabilir?** Tahmininizi yazınız. Cevabı bu bölümde birlikte bulacağız.

Dikdörtgen Dizilişlerden Çarpanlara

Saksıları eşit sıralara dizmek, 18'i iki doğal sayının çarpımı olarak yazmak demektir. Her diziliş bir dikdörtgen oluşturur. Bu yüzden bu modele **dikdörtgen modeli** ya da **alan modeli** diyoruz.

18 saksının dikdörtgen dizilişleri

Her nokta bir saksı



Dizilişlerde 1, 2, 3, 6, 9 ve 18 sayıları kullanıldı. Bu sayıların her biri 18'i kalansız böler. 3 sıralı dizilişi çevirirsek 6 sıralı dizilişi buluruz; bu yüzden 3 × 6 ile 6 × 3 aynı dikdörtgeni gösterir.

Tanım Çarpan

Bir doğal sayıyı iki doğal sayının çarpımı olarak yazdığımızda bu sayıların her birine o sayının **çarpanı** denir. Çarpanlar sayıyı kalansız böldüğü için onlara **bölen** de denir.

18 = 2 × 9 olduğundan 2 ve 9, 18'in çarpanıdır. 18 ÷ 2 = 9 ve 18 ÷ 9 = 2 bölmeleri kalansızdır. Demek ki bir sayının çarpanlarını bulmak, bölenlerini bulmakla aynı iştir.

Bir sayının, 18'in çarpanı olup olmadığını anlamak için bölme yapar ve kalana bakarız. 18 ÷ 4 işleminde bölüm 4, kalan 2'dir. Kalan 0 olmadığı için 4, 18'in çarpanı değildir.

Çarpanları Eksiksiz Bulmak: Çarpan Çiftleri

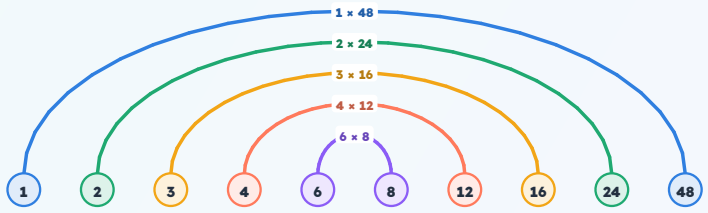
Bir sayının bütün çarpanlarını bulmak için 1'den başlayarak sayıyı sırayla bölmeyi deneriz. Her kalansız bölme bize bir **çarpan çifti** verir. 48 için deneyelim:

Denenen sayı	İşlem	Sonuç
1	48 ÷ 1 = 48	çift: 1 ve 48
2	48 ÷ 2 = 24	çift: 2 ve 24
3	48 ÷ 3 = 16	çift: 3 ve 16
4	48 ÷ 4 = 12	çift: 4 ve 12
5	bölüm 9, kalan 3	çarpan değil
6	48 ÷ 6 = 8	çift: 6 ve 8
7	bölüm 6, kalan 6	çarpan değil

Sıradaki sayı 8, zaten 6'nın eşi olarak bulundu. Denenen sayı bulunan eşlere ulaştığında çiftler tekrar etmeye başlar ve aramayı bitiririz. Çiftleri bir "gökkuşağı" ile gösterelim:

48'in çarpan gökkuşağı

Her yay bir çarpan çifti



48'in 10 çarpanı vardır: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ve 48. Her yayın iki ucundaki sayıların çarpımı 48'dir.

Varsayım, Genelleme ve Önerme

Matematikte bir duruma bakarak yaptığımız tahmine **varsayım** denir. Varsayımı pek çok örnekle sınarız. Her örnekte geçerli olan sonuca **genelleme** diyoruz. Genellemeyi açık bir cümleyle ya da sembollerle yazdığımızda bir **önerme** sunmuş oluruz. Önermeyi desteklemek için gerekçe ve örnek veririz; çürütmek için ise tek bir **karşı örnek** yeter.

Çarpanlarla ilgili bazı önermeler şunlardır:

1 HER SAYININ ÇARPANIDIR



Her doğal sayı, 1 ile kendisinin çarpımı olarak yazılabilir: 18 = 1 × 18, 35 = 1 × 35. Bir doğal sayının en küçük doğal sayı böleni 1'dir.

EN BÜYÜK ÇARPAN SAYININ KENDİSİDİR



Sıfır hariç bir doğal sayının en büyük böleni kendisidir. 18'den büyük bir doğal sayı 18'i kalansız bölemez.

ÇARPANLARIN SAYISI SINIRLIDIR



Bir sayının çarpanları 1 ile o sayı arasındadır. Bu yüzden çarpanları tek tek sayabiliriz: 18'in 6 çarpanı vardır.

KARE SAYILARDA ÇARPAN SAYISI TEKTİR



16 = 4 × 4 dizilişinde iki çarpan aynıdır. 16'nın çarpanları 1, 2, 4, 8 ve 16'dır. Bir çiftin eşi kendisi olduğu için çarpan sayısı tektir: 5.

Tuzağa düşme!

Sayının kendisini ve 1'i unutmayınız

Defne, 18'in çarpanlarını "2, 3, 6, 9" diye yazdı. 1 ile 18'i unuttu. 1 ve sayının kendisi her zaman çarpandır. Çarpanları çiftler hâlinde yazarsanız hiçbirini atlamazsınız.

Çözümlü örnek 1

Soru: Bir ortaokulun bilim şenliğine 60 öğrenci katılıyor. Öğrenciler eşit sayıda kişiden oluşan gruplara ayrılacak. Her grupta en az 4, en çok 12 öğrenci olacak ve hiçbir öğrenci gruba girmeden kalmayacak. Gruplar kaçar kişilik olabilir? Her durumda kaç grup oluşur?

Anlayalım. Grup büyüklüğü 60'ı kalansız bölmeli. Ayrıca 4 ile 12 arasında olmalı; 4 ve 12 de kabul edilir.

Planlayalım. 60'ın bütün çarpanlarını çiftler hâlinde bulalım. Sonra 4 ile 12 arasındakileri seçelim.

Çözelim. 60 = 1 × 60 = 2 × 30 = 3 × 20 = 4 × 15 = 5 × 12 = 6 × 10. Çarpanlar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Uygun grup büyüklükleri 4, 5, 6, 10 ve 12'dir. Grup sayıları sırasıyla 15, 12, 10, 6 ve 5 olur.

Kontrol edelim. 4 × 15 = 60, 5 × 12 = 60, 6 × 10 = 60, 10 × 6 = 60, 12 × 5 = 60. Her durumda bütün öğrenciler bir gruba girer.

2 Katlar ve Çarpan–Kat İlişkisi

MERAK KAPISI

Kırtasiyeci Zeynep Hanım boya kalemlerini 8'li kutularla satıyor. Kutular açılmadan satılıyor. Bir öğretmen sınıfı için tam 100 kalem almak istiyor. **Öğretmen tam 100 kalem alabilir mi? Alamıyorsa 100'e en yakın hangi sayılarda kalem alabilir?** Tahmininizi yazınız.

Katları Saymak

Bir kutuda 8 kalem varsa 1, 2, 3, 4, … kutuda sırasıyla 8, 16, 24, 32, … kalem olur. Bu sayılar 8'in katlarıdır.

Tanım Kat

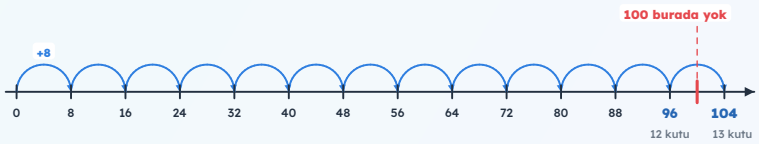
Bir doğal sayıyı sayma sayılarıyla (1, 2, 3, …) çarptığımızda elde ettiğimiz sayılara o sayının katları denir.

Kutu sayısı	1	2	3	4	5	6
Kalem sayısı	8	16	24	32	40	48

Katları sayı doğrusunda eşit sıçramalarla gösterebiliriz. Her sıçrama bir kutudur:

8'in katları sayı doğrusunda

Her sıçrama 8 birim



100, 8'in katları arasında yoktur: 8 × 12 = 96 ve 8 × 13 = 104. Öğretmen 12 kutuyla 96, 13 kutuyla 104 kalem alabilir. Merak Kapısı'nın cevabı budur.

8'in katlarını yazmayı sürdürebiliriz; her zaman bir kutu daha eklenebilir. Bu yüzden bir sayının **katları sonsuz** çoktur. Çarpanları ise sınırlıdır.

Yüzlük Tabloda Katlar

Yüzlük tabloda 7'nin katlarını boyayalım. 7'den başlayıp 7'şer ilerleriz.

Yüzlük tabloda 7'nin katları

Boyalı kareler 7'nin katları

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	**28**	29	30
31	32	33	34	**35**	36	37	38	39	40
41	**42**	43	44	45	46	47	48	**49**	50
51	52	53	54	55	**56**	57	58	59	60
61	62	**63**	64	65	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	**77**	78	79	80
81	82	83	**84**	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	**98**	99	100

7, 14, 21, …, 91, 98

Boyalı kareler 7'şer ilerler.

7 × 14 = 98 (tabloda)

7 × 15 = 105 (tablo dışında)

100'e kadar 7'nin 14 katı var.

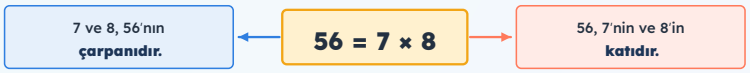
100'e kadar 7'nin 14 katı vardır, çünkü 7 × 14 = 98 ve 7 × 15 = 105'tir. Boyalı sayıların hepsi 7'ye kalansız bölünür: 98 ÷ 7 = 14. Bu bir genellemedir: **Bir doğal sayının katları bu sayıya tam bölünür.**

Çarpan ile Kat Arasındaki Köprü

56 = 7 × 8 eşitliğini iki yönden okuyabiliriz.

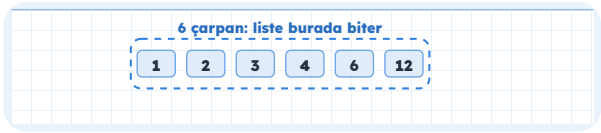
Bir çarpma, iki okuma

Çarpan ve kat aynı eşitliğin iki yüzüdür



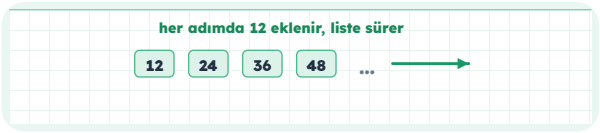
Bir sayı başka bir sayının katıysa ikinci sayı birincinin çarpanıdır. Bu iki cümle aynı çarpma işlemini anlatır.

ÇARPANLAR SINIRLIDIR



12'nin çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Hepsi 12'den küçük ya da 12'ye eşittir.

KATLAR SONSUZDUR



12'nin katları: 12, 24, 36, 48, … Hepsi 12'ye eşit ya da 12'den büyüktür. Listenin sonu yoktur.

Bir Önermeyi Sınamak

Barış şu varsayımda bulunuyor: "10'un her katı 5'in de katıdır." Önce örneklere bakalım:

5'in katları arasında 10'un katları

Çerçeveli sayılar 10'un katları



10, 20, 30, 40, 50, 60 sayılarının hepsi 5'in katıdır. **Gerekçe:** 10 = 5 × 2 olduğundan 10'un her katı 5 × 2 × (sayma sayısı) biçimindedir. Bu da 5'in bir katıdır. Örneğin 10 × 7 = 5 × 2 × 7 = 5 × 14 = 70.

Peki tersi doğru mu? "5'in her katı 10'un da katıdır." Bu önerme yanlıştır. Karşı örnek: 15. 15 = 5 × 3'tür ama 15 ÷ 10 işleminde kalan 5'tir.

Tuzağa düşme!

En küçük kat sayının kendisidir

Bu kitapta katları sayma sayılarıyla çarparak buluyoruz. Bu yüzden bir sayının en küçük katı kendisidir: 8'in katları 8 ile başlar. "4, 20'nin katıdır." demek yanlıştır; doğrusu "20, 4'ün katıdır." ya da "4, 20'nin çarpanıdır." olmalıdır.

Notlarım

Çözümlü örnek 2

Soru: Bir fırın simitleri 15'erli tepsilerde pişiriyor. Okul kantini 200 simit sipariş etti. Fırın yalnızca dolu tepsi pişirdiğine göre en az kaç tepsi pişirmelidir? Sipariş teslim edilince kaç simit artar?

Anlayalım. Pişen simit sayısı 15'in bir katı olmalı ve 200'den az olmamalıdır.

Planlayalım. 15'in 200'e en yakın katlarını bulalım.

Çözelim. 15 × 13 = 195 ve 15 × 14 = 210. 195 simit yetmez, 210 simit yeter. Fırın 14 tepsi pişirmelidir. 210 − 200 = 10 simit artar.

Kontrol edelim. 200 ÷ 15 işleminde bölüm 13, kalan 5'tir. 13 tepsiyle 5 simit eksik kalır; bu yüzden bir tepsi daha gerekir.

3 10, 5, 2 ve 4 ile Bölünebilme

Basamaklara Ayırınca Ne Görüyoruz?

Bir sayıyı onluklar kısmı ve birler basamağı olarak iki parçaya ayırabiliriz: 3 476 = 3 470 + 6. Onluklar kısmı her zaman 10'un katıdır. 10 = 2 × 5 olduğu için 10'un katları hem 2'ye hem 5'e bölünür.

Sayıyı iki parçaya ayırmak

Karar birler basamağında verilir



Bu yüzden 2, 5 ve 10 ile bölünebilmede yalnızca **birler basamağına** bakmak yeter. Can da 7 340'ın birler basamağındaki 0'a bakmıştır.

10 ile Bölünebilme

10'un katları 10, 20, 30, 40, … hep 0 ile biter. **Birler basamağı 0 olan sayılar 10 ile tam bölünür.** Örneğin 5 230 ÷ 10 = 523. 3 475 sayısının birler basamağı 5'tir; bu sayı 10'a bölünmez ve kalan 5 olur. Bir sayı 10'a bölündüğünde kalan, birler basamağındaki rakamdır.

5 ile Bölünebilme

5'in katları 5, 10, 15, 20, 25, … olur ve birler basamakları sırayla 5, 0, 5, 0, … diye tekrar eder. **Birler basamağı 0 ya da 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür.** 2 338 sayısının birler basamağı 8'dir. Bu sayı 5'e bölünmez; kalan 8 − 5 = 3 olur.

2 ile Bölünebilme

Birler basamağı 0, 2, 4, 6 ya da 8 olan sayılara **çift sayı** denir. **Çift sayılar 2 ile tam bölünür.** Birler basamağı 1, 3, 5, 7 ya da 9 olan sayılar tek sayıdır. Tek sayıların 2'ye bölümünden kalan her zaman 1'dir: 61 237 ÷ 2 işleminde kalan 1'dir.

4 ile Bölünebilme

4 için birler basamağı yeterli midir? 12 ve 22 sayılarının ikisi de 2 ile biter. 12, 4'e bölünür ama 22 bölünmez. Demek ki 4 için daha fazlasına bakmalıyız.

100 = 4 × 25 olduğundan yüzlükler ve daha büyük basamaklar her zaman 4'ün katıdır. Geriye son iki basamak kalır.

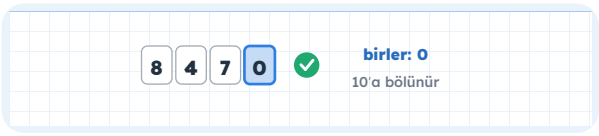
4 ile bölünebilmede son iki basamak

100, 4'ün katıdır



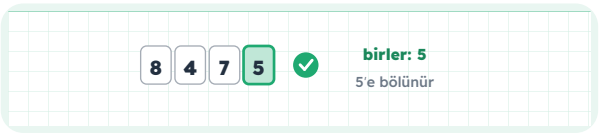
Son iki basamağının oluşturduğu sayı 4'e bölünen sayılar 4 ile tam bölünür. 5 316 = 5 300 + 16 ve 16 = 4 × 4 olduğundan 5 316, 4'e bölünür. Son iki basamağı 00 olan sayılar da 4'e bölünür: 7 300 gibi.

10 İLE



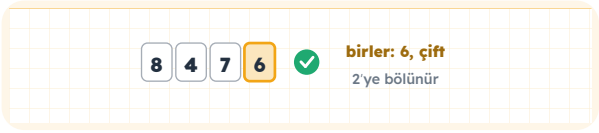
Birler basamağı 0 ise sayı 10'a bölünür. Örnek: 8 470.

5 İLE



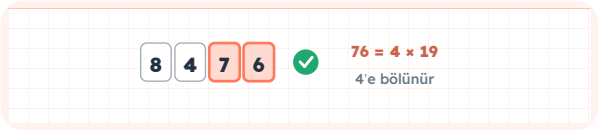
Birler basamağı 0 ya da 5 ise sayı 5'e bölünür. Örnek: 8 475.

2 İLE



Birler basamağı çift ise (0, 2, 4, 6, 8) sayı 2'ye bölünür. Örnek: 8 476.

4 İLE



Son iki basamak 4'ün katıysa sayı 4'e bölünür. Örnek: 8 476, çünkü 76 = 4 × 19.

Sayı	2	4	5	10
7 340	E	E	E	E
2 335	H	H	E	H
9 608	E	E	H	H
4 102	E	H	H	H

E: Bölünür · H: Bölünmez

Tuzağa düşme!

2'ye bölünen her sayı 4'e bölünmez

8 474 çift sayıdır ama son iki basamağı olan 74, 4'ün katı değildir; 74 ÷ 4 işleminde kalan 2'dir. Tersine, 4'e bölünen her sayı 2'ye de bölünür, çünkü 4 = 2 × 2.

Bölünebilme kurallarıyla yeni önermeler de kurabiliriz. **Önerme:** 5'e bölünebilen çift sayılar 10'a da bölünür. **Gerekçe:** 5'e bölünen sayının birler basamağı 0 ya da 5'tir. Çift sayının birler basamağı 5 olamaz. Geriye 0 kalır; birler basamağı 0 olan sayı 10'a bölünür.

Çözümlü örnek 3

Soru: Dört basamaklı 63□8 sayısı 4 ile tam bölünüyor. □ yerine hangi rakamlar yazılabilir?
Anlayalım. 4 ile bölünebilmede son iki basamağa bakılır. Son iki basamak □8'dir.
Planlayalım. □ yerine 0'dan 9'a kadar rakamları yazıp 4'ün katı olanları seçelim.
Çözelim. 08, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98 sayılarından 4'ün katı olanlar 08, 28, 48, 68 ve 88'dir. □ yerine 0, 2, 4, 6 ya da 8 yazılabilir. Beş sayı elde edilir: 6 308, 6 328, 6 348, 6 368 ve 6 388.
Kontrol edelim. 6 328 ÷ 4 = 1 582. 6 338 ÷ 4 işleminde ise kalan 2'dir; 3 rakamı uygun değildir.

4 3, 9 ve 6 ile Bölünebilme

Rakamlar Toplamı Neden İşe Yarar?

10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1 000 = 999 + 1. 9, 99 ve 999 sayıları hem 9'un hem 3'ün katıdır. Bu gözlemi 342 sayısında kullanalım:

342 = 3 × 100 + 4 × 10 + 2 = 3 × 99 + 4 × 9 + 3 + 4 + 2

342'yi bloklarla parçalamak

Her yüzlük 99 + 1, her onluk 9 + 1



Mavi ve yeşil parçalar 9'un katıdır; noktalı kareler ayrılan küplerdir.

3 × 99 ve 4 × 9 parçaları 9'un katıdır. Geriye rakamların toplamı kalır: 3 + 4 + 2 = 9. Rakamlar toplamı 9'a bölündüğü için 342 de 9'a bölünür: 342 ÷ 9 = 38. Sena da 1 + 2 + 6 = 9 toplamını bulmuştur. Kartların yeri değişse de toplam değişmez.

3 ile Bölünebilme

Rakamlarının toplamı 3'ün katı olan sayılar 3 ile tam bölünür. 8 403 için 8 + 4 + 0 + 3 = 15 bulunur. 15, 3'ün katıdır. Bu yüzden 8 403, 3'e bölünür: 8 403 ÷ 3 = 2 801.

9 ile Bölünebilme

Rakamlarının toplamı 9'un katı olan sayılar 9 ile tam bölünür. 7 128 için 7 + 1 + 2 + 8 = 18 bulunur. 18, 9'un katıdır: 7 128 ÷ 9 = 792. 8 403 sayısının rakamlar toplamı 15'tir; 15, 9'un katı olmadığından 8 403, 9'a bölünmez.

9 = 3 × 3 olduğu için 9'a bölünen her sayı 3'e de bölünür. Tersi her zaman doğru değildir: 8 403, 3'e bölünür ama 9'a bölünmez.

6 ile Bölünebilme

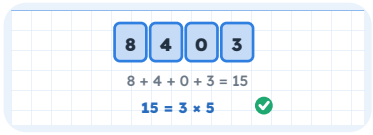
6 = 2 × 3'tür. **Hem 2'ye hem 3'e bölünen sayılar 6 ile tam bölünür.** 5 418 çift sayıdır, yani 2'ye bölünür. Rakamlar toplamı 5 + 4 + 1 + 8 = 18 olduğundan 3'e de bölünür. O hâlde 5 418, 6'ya bölünür:
5 418 ÷ 6 = 903.

2 ve 3 işaretli sayı şeridi

İki işareti de olanlar 6'nın katları

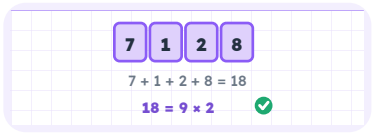


3 İLE



Rakamlar toplamı 3'ün katıysa sayı 3'e bölünür. Örnek: 8 403.

9 İLE



Rakamlar toplamı 9'un katıysa sayı 9'a bölünür. Örnek: 7 128.

6 İLE



Sayı çift ve rakamlar toplamı 3'ün katıysa 6'ya bölünür. Örnek: 5 418.

Tuzağa düşme!

İki kuralı birleştirmek her zaman işe yaramaz

Hem 2'ye hem 3'e bölünen sayılar 6'ya bölünür. Ama hem 2'ye hem 4'e bölünen her sayı 8'e bölünmez. 20 sayısı 2'ye ve 4'e bölünür; 20 ÷ 8 işleminde ise kalan 4'tür. 2 ile 3'ün 1'den başka ortak böleni yoktur; 2 ile 4'ün ise 2 de ortak bölenidir.

4'ün katları ve 8'in katları

Çarpı işaretli sayılar karşı örnek



Sayı	2	3	4	5	6	9	10
2 340	E	E	E	E	E	E	E
3 015	H	E	H	E	H	E	H
61 236	E	E	E	H	E	E	H
7 316	E	H	E	H	H	H	H

E: Bölünür · H: Bölünmez

Kurallar Ne Zaman İşe Yarar?

Bölünebilme kuralları büyük sayılarda birkaç saniyede karar verdirir. Uzun bir bölme yapmadan "Kalan olur mu?" sorusunu cevaplarız. Ancak bu temada 7 ile bölünebilme için bir kural öğrenmiyoruz. 7'ye bölünmeyi bölme yaparak kontrol ederiz.

Çözümlü örnek 4

Soru: Üç basamaklı 5□2 sayısı 6 ile tam bölünüyor. □ yerine hangi rakamlar yazılabilir?
Anlayalım. Sayı 6'ya bölünüyorsa hem 2'ye hem 3'e bölünür.
Planlayalım. Önce 2 koşuluna, sonra rakamlar toplamına bakalım.
Çözelim. Birler basamağı 2 olduğu için sayı her durumda çifttir. Rakamlar toplamı 5 + □ + 2 = 7 + □ olur. Bu toplamın 3'ün katı olması için □ yerine 2, 5 ya da 8 yazılmalıdır (toplamlar 9, 12, 15). Sayılar: 522, 552, 582.
Kontrol edelim. 522 ÷ 6 = 87, 552 ÷ 6 = 92, 582 ÷ 6 = 97. Kalan yoktur.

5 Asal Sayılar ve Asal Çarpanlar

Asal Sayı

12'nin çarpanları 1, 2, 3, 4, 6 ve 12'dir. 13'ün ise yalnızca iki çarpanı vardır: 1 ve 13. Kaktüsler bu yüzden tek sıraya dizilebilir.

Tanım Asal sayı

1 ve kendisinden başka çarpanı olmayan, 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.

Bir asal sayının tam olarak iki çarpanı vardır. Bir sayının asal olup olmadığını anlamak için sayıyı sırayla 2, 3, 5, 7, … asal sayılarına bölmeyi deneriz. Denediğimiz sayının kendisiyle çarpımı sayıyı geçtiğinde durabiliriz. 89 için: 89 tektir, 2'ye bölünmez. Rakamlar toplamı 17'dir, 3'e bölünmez. Birler basamağı 9'dur, 5'e bölünmez. 89 ÷ 7 işleminde kalan 5'tir. Sıradaki asal 11'dir ve 11 × 11 = 121, 89'dan büyüktür. O hâlde 89 asaldır.

Eratosten Kalburu

Antik Yunan döneminde yaşamış matematikçi Eratosten (Eratosthenes), asal sayıları bulmak için bir yöntem kullanmıştır. Kalbur iri taneleri tutup küçükleri elediği gibi bu yöntem de asal olmayanları eler, asal sayıları bırakır. Bu yüzden yönteme **Eratosten kalburu** denir.

1. 1'in üzerini çiziniz; 1 asal değildir.
2. 2'yi daire içine alınız ve 2'nin öteki katlarının üzerini çiziniz.
3. Üzeri çizilmemiş ilk sayı 3'tür. 3'ü daire içine alınız ve 3'ün öteki katlarının üzerini çiziniz.
4. Aynı işlemi 5 ve 7 için tekrarlayınız.
5. Üzeri çizilmeden kalan sayılar asaldır.

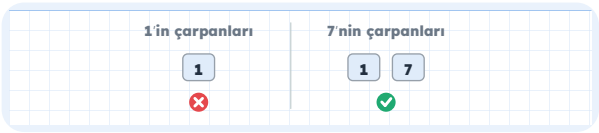
Yüzlük tabloda Eratosten kalburu

Renk, sayıyı eleyen en küçük asalı gösterir



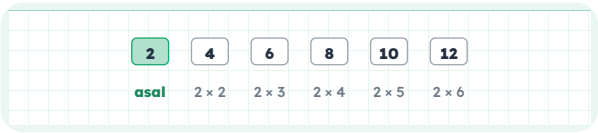
7'den sonra durabiliriz, çünkü 11 × 11 = 121, 100'den büyüktür. 100'e kadar asal olmayan her sayının 2, 3, 5 ya da 7 çarpanlarından en az biri vardır. 100'e kadar 25 asal sayı vardır: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

1 ASAL DEĞİLDİR



1'in yalnızca bir çarpanı vardır: 1. Asal sayının ise tam olarak iki çarpanı olmalıdır.

TEK ÇİFT ASAL 2'DİR



2'den büyük her çift sayının 2 çarpanı vardır. Bu yüzden 2'den büyük çift sayılar asal değildir.

TEK OLMAK YETMEZ



91 tek sayıdır ama 91 = 7 × 13'tür. Asal olduğuna karar vermeden önce asal sayılarla bölmeyi deneyiniz.

ASALLARIN SONU YOKTUR



Sayılar büyüdükçe asal sayılar seyrekleşir ama bitmez. Matematikçiler asal sayıların sonsuz çok olduğunu kanıtlamıştır.

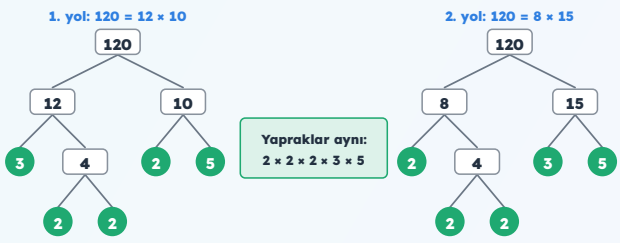
Asal Çarpanlar ve Çarpan Ağacı

Bir sayının asal olan çarpanlarına o sayının **asal çarpanları** denir. 90'ın çarpanları 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 ve 90'dır. Bunlardan 2, 3 ve 5 asaldır; 90'ın asal çarpanları 2, 3 ve 5'tir.

Bir sayıyı asal çarpanlarına ayırmak için **çarpan ağacı** kullanabiliriz. Sayıyı iki çarpana ayırırız. Asal olmayan her dalı yeniden ayırırız. Bütün dallar asal sayılarla bitince dururuz. 120'yi iki farklı yoldan ayıralım:

120 için iki çarpan ağacı

Daire içindekiler asal



İki ağacın yaprakları aynıdır: 2, 2, 2, 3 ve 5. Buna göre 120 = 2 × 2 × 2 × 3 × 5 yazılır. **Bir sayıyı hangi çarpan çiftiyle ayırmaya başlarsak başlayalım, sonunda aynı asal çarpanları buluruz.**

Bölme Yöntemi

Asal çarpanları bölme yöntemiyle de bulabiliriz. Sayıyı bölünebildiği en küçük asal sayıya böleriz. Bölümü yeniden en küçük asal böleniyle böleriz. Bölüm 1 olunca dururuz.

252 = 2 × 2 × 3 × 3 × 7 olur. 252'nin asal çarpanları 2, 3 ve 7'dir.

Asal çarpanlar sayı hakkında çok şey söyler. 252'nin asal çarpanlarından birkaçını çarparsak yine 252'nin bir çarpanını buluruz: 2 × 3 × 7 = 42 ve 252 ÷ 42 = 6. Asal çarpanlarında 5 bulunmadığı için 252, 5'e ve 10'a bölünmez.

1'den büyük her sayı için

Önerme: 1'den büyük doğal sayılar ya asaldır ya da asal sayıların çarpımı biçiminde yazılabilir. Örnekler: 97 asaldır. 98 = 2 × 7 × 7, 99 = 3 × 3 × 11, 100 = 2 × 2 × 5 × 5.

Çözümlü örnek 5

Soru: Bir sayının asal çarpanları yalnızca 2, 3 ve 5'tir; üçü de sayının çarpanıdır. Sayı 50 ile 100 arasında olduğuna göre bu sayı kaç olabilir? Bütün olasılıkları yazınız.

Anlayalım. Sayı 2'ye, 3'e ve 5'e bölünmeli; başka asal çarpanı olmamalıdır.

Planlayalım. 2 × 3 × 5 = 30'dan başlayalım. 30'u 2, 3 ya da 5 ile çarparak yeni sayılar üretelim.

Çözelim. 30 × 2 = 60, 30 × 3 = 90, 30 × 5 = 150. 30 × 2 × 2 = 120 ve sonraki sayılar 100'ü geçer. 30 ise 50'den küçüktür. Sayı 60 ya da 90 olabilir.

Kontrol edelim. 60 = 2 × 2 × 3 × 5 ve 90 = 2 × 3 × 3 × 5. İkisinde de yalnızca 2, 3 ve 5 vardır.

Doğada ve teknolojide asal sayılar

Kuzey Amerika'da yaşayan bazı ağustosböceği türleri 13 ya da 17 yıl toprak altında kalır, sonra hep birlikte yüzeye çıkar. 13 ve 17 asal sayılardır. İnternette bilgileri şifrelerken de çok büyük asal sayılardan yararlanılır.

252'yi bölme yöntemiyle ayırmak

Sağ sütunda asal bölenler

252	2	252 ÷ 2 = 126
126	2	126 ÷ 2 = 63
63	3	63 ÷ 3 = 21
21	3	21 ÷ 3 = 7
7	7	7 ÷ 7 = 1
1		

252 = 2 × 2 × 3 × 3 × 7

Sağ sütundaki asal bölenlerin çarpımı sayıyı verir. Bölüm 1 olunca durulur.

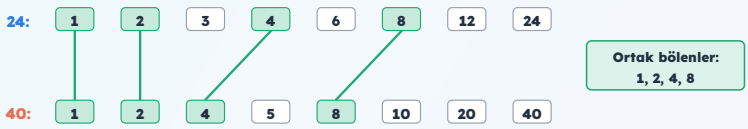
6 Ortak Bölenler: Eşit Paylaştırma

İki Sayının Bölen Listeleri

Paketteki kutu sayısı hem 24'ü hem 40'ı kalansız bölmelidir. İki sayının bölenlerini yan yana yazalım:

24 ve 40'ın bölenleri

Ortadaki sayılar iki listede de var



İki listede de bulunan sayılar 1, 2, 4 ve 8'dir.

Tanım Ortak bölen

İki ya da daha fazla doğal sayının her birini kalansız bölen doğal sayılara bu sayıların ortak bölenleri denir.

Paketteki kutu	Kedi maması paketi	Köpek maması paketi	Toplam paket
1	24	40	64
2	12	20	32
4	6	10	16
8	3	5	8

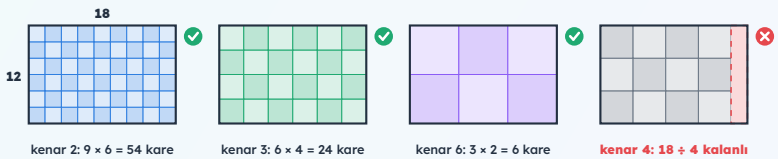
Deniz haklıdır. 6 olmaz: 24 ÷ 6 = 4 ama 40 ÷ 6 işleminde kalan 4'tür. Bu durumda 4 kutu köpek maması dışarıda kalır. 1 her sayının böleni olduğu için iki sayının en az bir ortak böleni vardır.

Çizimle Ortak Bölen: Kareli Kâğıt

Kareli kâğıda 12 birime 18 birimlik bir dikdörtgen çizelim. Bu dikdörtgeni boşluk kalmadan eş karelere ayırmak istiyoruz. Karenin kenar uzunluğu hem 12'yi hem 18'i bölmelidir.

12 × 18 dikdörtgeni eş karelere ayırmak

Ölçekli değildir



12 ile 18'in ortak bölenleri 1, 2, 3 ve 6'dır. Kenarı 4 birim olan kareler olmaz, çünkü 18 ÷ 4 işleminde kalan 2'dir. Kare büyüdükçe kare sayısı azalır: 1'lik karelerle 216, 6'lık karelerle 6 kare gerekir.

Aralarında Asal Sayılar

8'in bölenleri 1, 2, 4, 8; 15'in bölenleri 1, 3, 5, 15'tir. İki listenin tek ortak sayısı 1'dir.

Tanım Aralarında asal

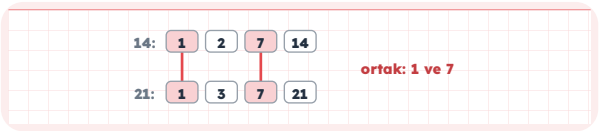
Ortak böleni yalnızca 1 olan iki doğal sayıya **aralarında asal** sayılar denir.

ARALARINDA ASAL



9 ile 16: 9'un bölenleri 1, 3, 9; 16'nın bölenleri 1, 2, 4, 8, 16. Tek ortak bölen 1'dir.

ARALARINDA ASAL DEĞİL



14 ile 21: 14'ün bölenleri 1, 2, 7, 14; 21'in bölenleri 1, 3, 7, 21. Ortak bölenler 1 ve 7'dir.

Tuzağa düşme!

Aralarında asal sayılar asal olmak zorunda değildir

8 ile 15 aralarında asaldır ama ikisi de asal sayı değildir. "Aralarında asal" bir sayının değil, iki sayının birlikte taşıdığı bir özelliktir. İki farklı asal sayı ise her zaman aralarında asaldır: 5 ile 7 gibi.

Çözümlü örnek 6

Soru: Kenar uzunlukları 24 m ve 36 m olan dikdörtgen biçimli bir bahçenin kenarlarına eşit aralıklarla fidan dikilecek. Her köşeye birer fidan gelecek ve aralıklar metre cinsinden doğal sayı olacak. Aralıklar kaç metre olabilir? Aralık 6 m seçilirse kaç fidan gerekir?

Anlayalım. Fidanlar köşeden köşeye eşit aralıklıdır. Aralık her kenarı tam bölmeli, yani hem 24'ü hem 36'yı bölmelidir.

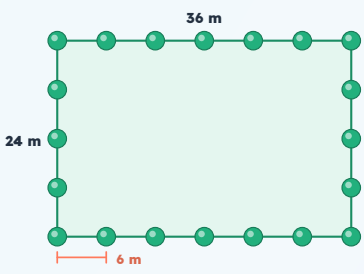
Planlayalım. 24 ile 36'nın ortak bölenlerini bulalım. Sonra çevreyi 6'ya bölerek fidan sayısını bulalım.

Çözelim. 24'ün bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. 36'nın bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Ortak bölenler 1, 2, 3, 4, 6 ve 12'dir; aralık bunlardan biri olabilir. Bahçenin çevresi $24 + 36 + 24 + 36 = 120$ m'dir. 6 m aralıkla $120 \div 6 = 20$ fidan gerekir.

Kontrol edelim. Kısa kenarda $24 \div 6 = 4$, uzun kenarda $36 \div 6 = 6$ aralık vardır. $4 + 6 + 4 + 6 = 20$ aralık eder. Kapalı bir çizgide aralık sayısı fidan sayısına eşittir.

Bahçenin kenarlarına 6 m arayla fidan

Ölçekli değildir



Kısa kenar: 24 ÷ 6 = 4 aralık
Uzun kenar: 36 ÷ 6 = 6 aralık
Çevre: 24 + 36 + 24 + 36 = 120 m
120 ÷ 6 = 20 fidan

7 Ortak Katlar: Buluşma Anları

Ortak Katları Tabloyla Bulmak

Kırmızı fener 4, 8, 12, … saniyelerde; yeşil fener 10, 20, 30, … saniyelerde yanar. Bir dakika 60 saniyedir.

Fener	60 saniyeye kadar yandığı anlar (saniye)
Kırmızı (4'ün katları)	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60
Yeşil (10'un katları)	10, 20, 30, 40, 50, 60

İki satırda da bulunan sayılar 20, 40 ve 60'tır. Fenerler bir dakikada 3 kez daha birlikte yanar; Efe haklı değildir.

Tanım Ortak kat

İki ya da daha fazla doğal sayının her birinin katı olan sayılara bu sayıların **ortak katları** denir.

Fenerlerin zaman çizelgesi



Saniye

Sayı Doğrusunda Ortak Katlar

Aras ile Duru 40 basamaklı bir merdiveni çıkıyor. Aras basamakları 3'er 3'er, Duru 5'er 5'er çıkıyor. İkisi de yerden başlıyor. İkisinin de bastığı basamakları sayı doğrusunda bulalım:

3'er ve 5'er sıçramalar



Ortak noktalar 3 ile 5'in ortak katları

İkisi de 15. ve 30. basamaklara basar. 15 ile 30, 3 ile 5'in 40'a kadar olan ortak katlarıdır.

Notlarım

Yüzlük Tabloda Ortak Katlar

Yüzlük tabloda 4 ve 6'nın katları

İki işareti taşıyan sayılar ortak kat

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4'ün katları (mavi çerçeve)

6'nın katları (turuncu)

ikisinin de katı: ortak kat

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96
Her biri bir öncekinden 12 fazla.

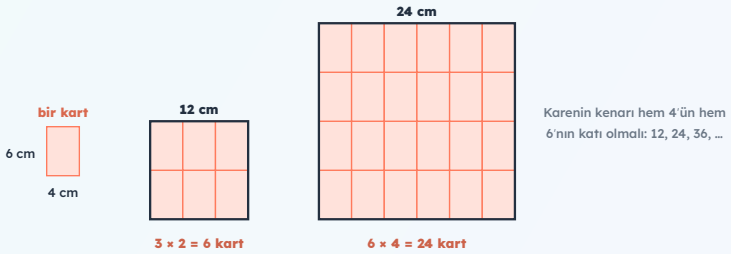
4 ile 6'nın 100'e kadar ortak katları 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 ve 96'dır. Ortak katlar listesi de katlar gibi sonsuza uzanır. Ortak bölenler ise sınırlı sayıdadır.

Çizimle Ortak Kat: Kartlardan Kare

Kenarları 4 cm ve 6 cm olan dikdörtgen kartları aynı yönde, boşluksuz yan yana ve alt alta dizerek kare oluşturmak istiyoruz. Karenin kenarı hem 4'ün hem 6'nın katı olmalıdır.

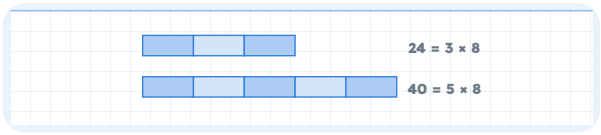
4 cm × 6 cm kartlardan kare

Bütün kartlar aynı ölçekte



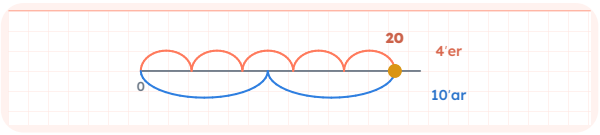
Kenarı 12 cm olan kare için yan yana 12 ÷ 4 = 3 kart, alt alta 12 ÷ 6 = 2 sıra gerekir; 3 × 2 = 6 kart kullanılır. Kenarı 24 cm olan karede 6 × 4 = 24 kart olur. Kenar 36 cm, 48 cm, ... da olabilir.

ORTAK BÖLEN ARANIR



Bir bütünü eşit parçalara bölüyor, paylaştırıyor ya da gruplara ayırıyorsak: eşit paketler, eş kareler, eşit fidan aralıkları.

ORTAK KAT ARANIR



Tekrarlanan olayların buluşma anını arıyor ya da küçük parçalarla büyük bir bütün kuruyorsak: fenerler, otobüsler, kartlardan kare.

Tuzağa düşme!

Çarpım tek ortak kat değildir

İki sayının çarpımı her zaman bir ortak kattır ama listedeki tek ortak kat değildir. 4 × 6 = 24 ortak kattır; oysa 12 de 4 ile 6'nın ortak katıdır. Buluşma problemlerinde katları baştan sırayla yazınız.

Çözümlü örnek 7

Soru: Bir durağa A hattının otobüsleri 12 dakikada bir, B hattının otobüsleri 18 dakikada bir geliyor. İki otobüs saat 07.30'da durakta karşılaştı. Saat 09.00'a kadar iki otobüsün durakta yeniden birlikte bulunduğu saatleri yazınız.

Anlayalım. İki otobüs, 07.30'dan sonra geçen dakika hem 12'nin hem 18'in katı olduğunda karşılaşır. 07.30 ile 09.00 arası 90 dakikadır.

Planlayalım. 12'nin ve 18'in 90'a kadar katlarını yazıp ortak olanları seçelim.

Çözelim. 12'nin katları: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84. 18'in katları: 18, 36, 54, 72, 90. Ortak katlar 36 ve 72'dir. 07.30'dan 36 dakika sonra saat 08.06, 72 dakika sonra 08.42 olur.

Kontrol edelim. 36 ÷ 12 = 3 ve 36 ÷ 18 = 2; 72 ÷ 12 = 6 ve 72 ÷ 18 = 4. Bölmelerin hepsi kalansızdır.

Durağın zaman şeridi

07.30-09.00



Yazılıya Son Bakış

Temanın kavram haritası

Bölümler arası bağlantılar



Soru tipi	Kullanılacak araç	Sık yapılan hata
Bütün çarpanlar	Çarpan çiftleri	1'i ve sayının kendisini unutmak
Katlar	Sayma sayılarıyla çarpma	"4, 20'nin katıdır." demek
Bölünebilme	Son basamaklar, rakamlar toplamı	4 için yalnız birler basamağına bakmak
Asal mı?	Asal sayılarla bölmeyi denemek	1'i asal saymak, 91'i asal sanmak
Asal çarpanlar	Çarpan ağacı, bölme yöntemi	Yaprakta asal olmayan sayı bırakmak
Ortak bölen	İki bölen listesi	Paylaştırmada katları aramak
Ortak kat	İki kat listesi, sayı doğrusu	Çarpımı tek ortak kat sanmak