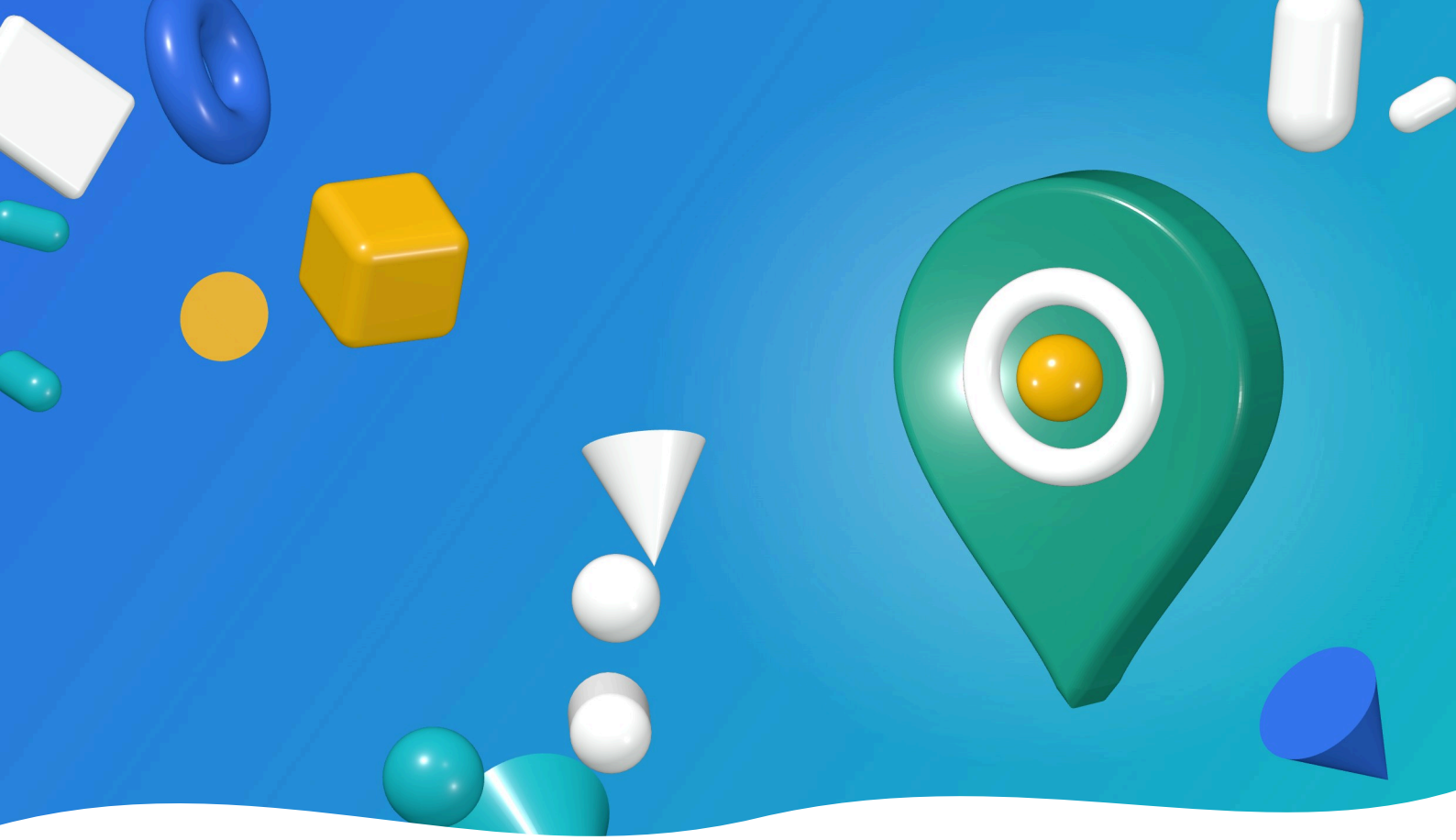


7. Sınıf

Matematik

1. Tema: Sayılar ve Nicelikler (1)

1. Dönem 1. Ortak Yazılı · Genel Tekrar

Talim Noktası
5 · 6 · 7. SINIF DERS KİTAPLARI

1. TEMA

Sayılar ve Nicelikler (1)

Tam sayılar, rasyonel sayılar, mutlak değer, ondalık gösterim, sıralama, dört işlem ve çok adımlı problemler

Bu temada neler var?

1. Tam Sayılar: Sıfırın İki Yanı 3
2. Rasyonel Sayılar 5
3. Mutlak Değer: Sıfıra Uzaklık 7
4. Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi 9
5. Rasyonel Sayılarda Karşılaştırma ve Sıralama 12
6. Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma 14
7. Tam Sayılarla Çarpma ve Bölme 17
8. Rasyonel Sayılarla Dört İşlem 19
9. Çok Adımlı İşlemler ve Problem Çözme 21

Kış sabahı Ardahan'da termometre sıfırın altını gösterir. Bir dalgıç deniz yüzeyinin metrelerce altına iner. Bir dükkânın aylık gideri gelirinden fazlaysa kasa zarar eder. Bütün bu durumlarda bir **başlangıç noktası** ve onun iki yanında uzanan sayılar vardır. Bu temada sayı ailemiz önce **tam sayılarla**, ardından **rasyonel sayılarla** büyüyecek. Sonra bu yeni sayılarla dört işlem yapıp gerçek hayattan problemler çözeceksiniz.

Anahtar kavramlar

tam sayı · pozitif · negatif · ters işaretli sayı · rasyonel sayı · mutlak değer · ondalık gösterim · devirli ondalık gösterim · karşılaştırma · sıralama · ters eleman · etkisiz eleman · işlem önceliği

Notlarım

1 Tam Sayılar: Sıfırın İki Yanı

MERAK KAPISI

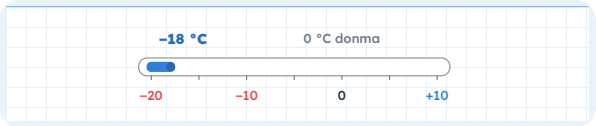
Ece ve ailesi bir alışveriş merkezinde asansöre zemin katta biniyor. Otomobilleri iki kat aşağıdaki otoparkta. Asansörün düğmelerinde 3, 2, 1, 0, −1, −2 yazıyor. Ece'nin küçük kardeşi soruyor: "Sıfırın altında kat mı olur? Eksi iki ne demek?" **Siz kardeşine nasıl açıklardınız?** Düşüncenizi yazınız. Bu bölümde birlikte cevaplayacağız.

Doğal Sayılar Yetmediğinde

5 ve 6. sınıfta çalıştığınız doğal sayılarla her toplamanın sonucu yine bir doğal sayıydı. Peki 3 + ? = 0 eşitliğinde "?" yerine hangi doğal sayı yazılabilir? Hiçbiri. 3'e hangi doğal sayıyı eklersek ekleyelim sonuç 3'ten küçük olamaz. Bu soruyu cevaplamak için sıfırın sol tarafına geçmemiz gerekir. 3 + (−3) = 0 eşitliğindeki **−3** sayısı "eksi üç" diye okunur ve sıfırdan 3 birim küçüktür.

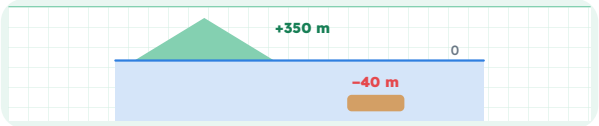
Gerçek hayatta pek çok nicelik bir **başlangıç noktası** ve iki **yön** ile anlatılır. Başlangıç noktasına 0 deriz. Bir yöndeki değerlere **pozitif**, öbür yöndeki değerlere **negatif** sayı deriz.

SICAKLIK



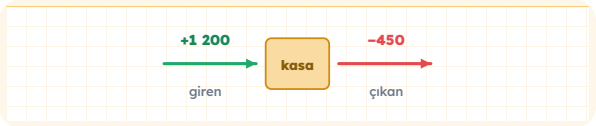
Suyun donma sıcaklığı 0 °C kabul edilir. Sıfırın üstü pozitif, altı negatiftir. Dondurucudaki −18 °C, sıfırın 18 derece altıdır.

DENİZ SEVİYESİ



Yükseklik ve derinlik deniz seviyesine göre ölçülür. 350 m yükseklikteki bir tepe +350 m, 40 m derinlikteki bir batık −40 m ile gösterilir.

GELİR VE GİDER



Kasaya giren para pozitif, çıkan para negatif yazılır. 1 200 TL'lik satış +1 200, 450 TL'lik fatura −450 olur.

ZAMAN



Bir yarışın başlama anı 0 kabul edilirse başlamadan 10 saniye önce −10 s, başladıktan 25 saniye sonra +25 s olur.

Tanım Tam sayılar

…, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, … sayılarının oluşturduğu sayı kümesine tam sayılar denir. Sıfırdan büyük tam sayılara pozitif tam sayı, sıfırdan küçük tam sayılara negatif tam sayı diyoruz. **0 ne pozitif ne negatiftir.**

Pozitif tam sayılar "+" işareti olmadan da yazılabilir: +5 ile 5 aynı sayıdır. Negatif sayıların "–" işareti ise hiçbir zaman atlanmaz.

Tuzağa düşme!

İşaret mi, işlem mi?
"–4" yazısındaki çizgi bir çıkarma işlemi değil, sayının **işaretidir**: sayının sıfırın solunda olduğunu söyler. İşlemlerde karışıklık olmasın diye işaretli sayıları ayraç içine alırız: 7 + (–4) gibi.

Yatay ve Dikey Sayı Doğrusu

Tam sayıları bir doğru üzerinde eşit aralıklarla sıralarız. **Yatay sayı doğrusunda** pozitif tam sayılar sıfırın sağında, negatif tam sayılar solundadır. **Dikey sayı doğrusunda** ise pozitifler yukarıda, negatifler aşağıdadır. Termometre ve asansör göstergesi dikey sayı doğrusuna örnektir.

Yatay ve dikey sayı doğrusu

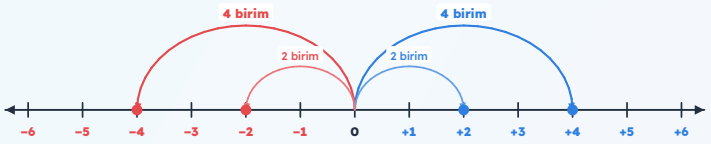
Eşit aralıklı çentikler



Sayı doğrusunda sıfırın iki yanında, sıfıra eşit uzaklıkta bulunan sayılara **ters işaretli sayılar** denir. +4 ile –4, +11 ile –11 ters işaretli sayılardır. Sıfırın ters işaretlisi yine kendisidir.

Ters işaretli sayılar

Her çift sıfıra eşit uzaklıkta



Ardışık İki Tam Sayı Arasında

Sayı doğrusunda 1 ile 2'ye bakın. Bu iki tam sayı **ardışıktır**; aralarında başka bir tam sayı yoktur. Peki 2 × ? = 1 eşitliğini sağlayan sayı nerededir? 2 × 0 = 0 ve 2 × 1 = 2 olduğundan aranan sayı 0 ile 1 arasında olmalıdır. Bu sayı bir tam sayı değildir. Yarım bardak su, –2,5 °C sıcaklık gibi değerleri göstermek için de tam sayılar yetmez. Bir sonraki bölümde sayıları bir kez daha genişleteceğiz.

Çözümlü örnek 1

Soru: Bir dalgıç deniz yüzeyinden 12 m aşağı iniyor. Aynı anda bir martı deniz yüzeyinden 9 m yükseklikte uçuyor. Deniz seviyesini 0 kabul ederek dalgıcın ve martının konumunu tam sayılarla yazınız. Martı ile dalgıç arasında kaç metre vardır?

Anlayalım. Başlangıç noktası deniz seviyesidir. Yukarısı pozitif, aşağısı negatiftir.

Planlayalım. Konumları dikey bir sayı doğrusunda gösterelim ve aradaki birimleri sayalım.

Çözelim. Dalgıç –12 m, martı +9 m konumundadır. Dalgıçtan deniz yüzeyine 12 m, yüzeyden martıya 9 m vardır. Aradaki uzaklık 12 + 9 = 21 m olur.

Kontrol edelim. Dikey sayı doğrusunda –12'den +9'a kadar saydığımızda 21 aralık geçeriz.

2 Rasyonel Sayılar

MERAK KAPISI

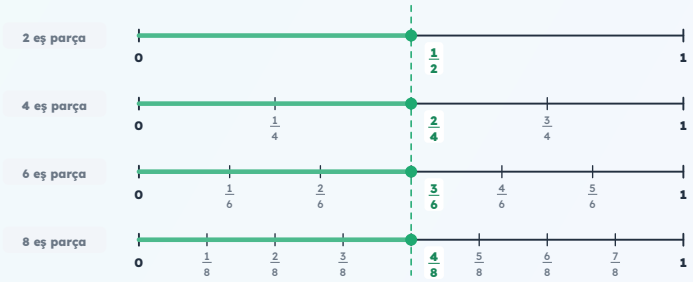
Mert 2 litre suyu 4 bardağa eşit olarak paylaştırıyor. Elif ise 3 litre suyu 6 bardağa eşit olarak paylaştırıyor. Elif "Benim bardaklarım seninkilerden daha dolu, çünkü benim sayılarım daha büyük." diyor. **Elif haklı mı? İki paylaştırmanın sonucu sayı doğrusunda nerede gösterilir?**

Denk Kesirler Aynı Noktada

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ ve $\frac{4}{8}$ kesirlerini birim uzunlukları eşit sayı doğrularında gösterelim. Birinci doğruda 0 ile 1 arasını 2 eş parçaya, ikincisinde 4, üçüncüsünde 6, dördüncüsünde 8 eş parçaya bölelim.

Denk kesirler aynı noktayı gösterir

Dört sayı doğrusu alt alta, birim uzunlukları eşit



Dört kesir de 0 ile 1'in tam ortasındaki aynı noktayı gösterir. Bu nokta tek bir sayıya karşılık gelir; o sayıyı $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ gibi sonsuz farklı biçimde yazabiliriz. En sade yazılışı $\frac{1}{2}$'dir. Aynı düşünce sıfırın solunda da geçerlidir: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{4}$ ve $-\frac{3}{6}$ sayıları 0 ile –1'in ortasındaki aynı noktayı gösterir.

Tanım Rasyonel sayı

Payı bir tam sayı, paydası sıfırdan farklı bir tam sayı olan kesir biçiminde yazılabilen her sayıya rasyonel sayı denir. Kısaca a ve b tam sayı, $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçimindeki sayılardır. a'ya **pay**, b'ye **payda** diyoruz.

Rasyonel sayılar da sıfıra göre ikiye ayrılır. $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{2}$ ve 0,8 gibi sıfırdan büyük olanlar **pozitif rasyonel sayılar**; $-\frac{1}{4}$, $-\frac{9}{5}$ ve –2,3 gibi sıfırdan küçük olanlar **negatif rasyonel sayılardır**. 0 yine ne pozitif ne negatiftir.

Tuzağa düşme!

Payda sıfır olamaz

$\frac{0}{6} = 0$ bir rasyonel sayıdır; 0'ı 6 eş parçaya bölmek 0 verir. Ancak $\frac{6}{0}$ bir sayı belirtmez. Bölme, çarpmanın tersidir: $\frac{6}{0} = ?$ diyebilmek için $0 \times ? = 6$ olmalıdır. 0'ı hangi sayıyla çarparsak çarpalım sonuç 0 çıkar, asla 6 çıkmaz. Bu yüzden paydası sıfır olan ifadeye **tanımsız** deriz.

Her Tam Sayı Bir Rasyonel Sayıdır

5 tam sayısını $\frac{5}{1}$ biçiminde yazabiliriz; 5 bütünü 1 parçaya bölmek yine 5 verir. Aynı şekilde $-3 = \frac{-3}{1}$ ve $0 = \frac{0}{1}$ olur. Demek ki her tam sayı **paydası 1 olan** bir rasyonel sayıdır. Bir tam sayıyı paydası 1'den farklı biçimlerde de yazabiliriz: $5 = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$.

Doğal sayılar tam sayıların içindedir; tam sayılar da rasyonel sayıların içindedir. Bu ilişkiyi iç içe bölgelerle gösterelim:

Sayıların iç içe ailesi

İçteki bölge dıştakinin parçasıdır



Tuzağa düşme!

Her rasyonel sayı tam sayı değildir

"Her tam sayı bir rasyonel sayıdır." önermesi doğrudur. Tersi doğru değildir: $\frac{2}{3}$ bir rasyonel sayıdır ama tam sayı değildir. Tek bir karşı örnek, tersinin yanlış olduğunu göstermeye yeter.

Negatif Rasyonel Sayılarda İşaretin Yeri

$-\frac{3}{4}$ sayısı, sıfırın solunda $\frac{3}{4}$ birim uzaklıktaki noktadır. Eksi işaretini kesrin önüne, paya ya da paydaya yazmak sayıyı değiştirmez:

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$$

Sayı doğrusunda bir rasyonel sayıyı göstermek için önce sayının hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu buluruz. Sonra o aralığı paydadaki sayı kadar eş parçaya böleriz.

Rasyonel sayıları sayı doğrusuna yerleştirmek

Her birim 3 eş parçaya bölünmüştür



$\frac{4}{3}$ sayısı 1 ile 2 arasındadır, çünkü $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$'tür; 1'den sonra bir parça ileri gideriz. $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$ olduğundan bu sayı −1 ile −2 arasındadır; −1'den sola doğru iki parça gideriz.

Ondalık gösterimle verilen sayılar da rasyoneldir: $0{,}7 = \frac{7}{10}$ ve $-2{,}25 = -\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$. Kısacası **her rasyonel sayı sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelir.**

Çözümlü örnek 2

Soru: Bir gölün su seviyesi her gün ölçülüyor. Normal seviye 0 kabul ediliyor. Pazartesi seviye normalin $\frac{3}{4}$ m altında, çarşamba $\frac{1}{2}$ m üstünde, cuma $1\frac{1}{4}$ m altında ölçülüyor. Bu ölçümleri rasyonel sayılarla yazıp aynı sayı doğrusunda gösteriniz. Hangi gün seviye normalden en uzaktır?

Anlayalım. Normalin altı negatif, üstü pozitif rasyonel sayıyla gösterilir.

Planlayalım. Paydalar 4 ve 2'dir. Birimi 4 eş parçaya bölen bir sayı doğrusu kullanalım; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ olur.

Çözelim. Pazartesi $-\frac{3}{4}$, çarşamba $+\frac{1}{2}$, cuma $-1\frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$. Sıfıra uzaklıklar sırasıyla 3, 2 ve 5 parçadır. Seviye cuma günü normalden en uzaktır.

Kontrol edelim. $\frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ olduğundan cuma ölçümü sıfıra en uzak noktadır.

3 Mutlak Değer: Sıfıra Uzaklık

MERAK KAPISI

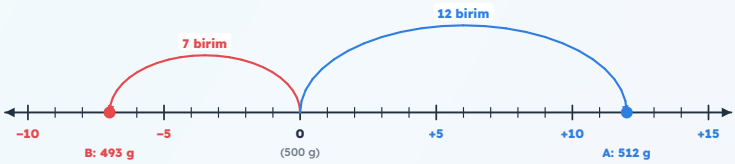
Bir fabrikada iki makine 500 gramlık un paketi dolduruyor. Kontrolde A makinesinin bir paketi 512 g, B makinesinin bir paketi 493 g geliyor. Can "A makinesi fazla koymuş, bu müşteri için iyi; asıl hatalı olan B makinesi." diyor. **Hata miktarını hangi sayıyla ölçmeliyiz? Hangi makine daha az hatalıdır?**

Başlangıç Noktasına Uzaklık

Paketleri, 500 g'ı başlangıç noktası (0) kabul eden bir sayı doğrusunda gösterelim. A makinesinin paketi +12, B makinesinin paketi −7 noktasındadır. Hata miktarını işaret değil, **uzaklık** belirler: A'nın paketi 12 g, B'nin paketi 7 g uzaktadır.

Paketlerin hedef kütleye uzaklığı

0 noktası: 500 g

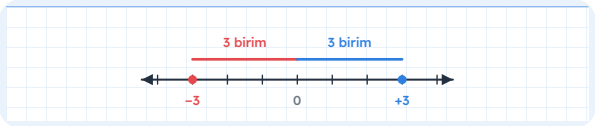


Tanım Mutlak değer

Bir sayının, sayı doğrusunda seçilen başlangıç noktasından kaç birim uzakta olduğunu gösteren sayıya o sayının mutlak değeri denir. Başlangıç noktası 0 olduğunda a sayısının mutlak değeri |a| ile gösterilir ve "a'nın mutlak değeri" diye okunur.

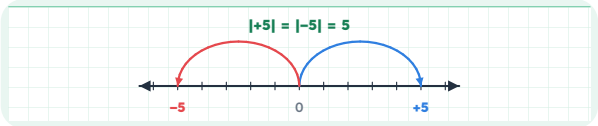
Örneğin $|-7| = 7$, $|+12| = 12$, $|0| = 0$ ve $|-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$ olur.

MUTLAK DEĞER NEGATİF OLMAZ



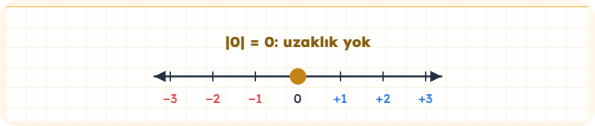
Uzaklık hiçbir zaman negatif olmaz. Bu yüzden bir sayının mutlak değeri ya pozitiftir ya da 0'dır.

TERS İŞARETLİLER EŞİTTİR



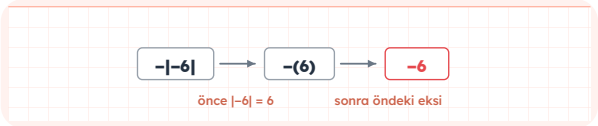
+5 ve −5 sıfıra eşit uzaklıktadır: |+5| = |−5| = 5. Ters işaretli sayıların mutlak değerleri eşittir.

SIFIRIN MUTLAK DEĞERİ



Sıfır, başlangıç noktasının kendisidir; uzaklığı yoktur. Bu yüzden |0| = 0.

DIŞARIDAKİ İŞARET KALIR



−|−6| ifadesinde önce |−6| = 6 bulunur, sonra öndeki işaret yazılır: −|−6| = −6.

Tuzağa düşme!

Mutlak değer "işareti silmek" değildir

Bir sayının mutlak değerini bulurken |−8| = 8 sonucuna bakıp mutlak değerin yalnızca eksi işaretini sildiğini düşünmek yanıltıcıdır. Mutlak değer bir **uzaklıktır**. −|4| ya da −|−4| ifadelerinde mutlak değerin dışındaki işaret silinmez; ikisinin de sonucu −4'tür.

Mutlak Değeri Aynı Olan Sayılar

Mutlak değeri 3 olan sayıları arayalım. Sıfırdan 3 birim sağa gidersek +3'e, 3 birim sola gidersek −3'e ulaşırız. Demek ki mutlak değeri 3 olan iki sayı vardır: +3 ve −3. Mutlak değeri 0 olan tek sayı 0'dır. Mutlak değeri negatif olan bir sayı ise yoktur.

Çözümlü örnek 3

Soru: Bir sınıfta öğrenciler bir karpuzun kütlesini tahmin ediyor. Karpuzun gerçek kütlesi 6 kg'dır. Ayşe 7,5 kg, Burak 4,8 kg, Cemre 6,9 kg tahmin ediyor. Tahminlerin hata miktarlarını mutlak değerle bulunuz. En iyi tahmini kim yapmıştır?

Anlayalım. Gerçek kütle başlangıç noktasıdır. Tahmin gerçek değerden büyükse sapma pozitif, küçükse negatiftir. Hata miktarı, sapmanın mutlak değeridir.

Planlayalım. Her tahmin için sapmayı işaretli yazalım, sonra mutlak değerini alalım.

Çözelim. Ayşe 7,5 − 6 = 1,5 kg fazla söylemiştir; sapması +1,5. Burak 6 − 4,8 = 1,2 kg eksik söylemiştir; sapması −1,2. Cemre 6,9 − 6 = 0,9 kg fazla söylemiştir; sapması +0,9. Hata miktarları |+1,5| = 1,5, |−1,2| = 1,2 ve |+0,9| = 0,9'dur. En küçük hata Cemre'nindir.

Kontrol edelim. Sayı doğrusunda 6'ya en yakın tahmin 6,9'dur; 0,9 birim uzaktadır.

4 Rasyonel Sayıların Ondalık Gösterimi

MERAK KAPISI

Arda hesap makinesinde 3 ÷ 8 işlemini yapınca ekranda 0,375 görüyor. Sonra 1 ÷ 3 işlemini yapıyor; ekran 0,3333333 ile doluyor. Arda "Ekran daha uzun olsaydı 3'ler bir yerde biterdi." diyor. **Sizce 3'ler biter mi? Neden bazı bölmeler biter, bazıları bitmez?**

Payı Paydaya Bölmek

Bir kesir aynı zamanda bir bölme işlemidir: $\frac{3}{8} = 3 \div 8$. Bölmeyi virgülden sonra da sürdürürsek rasyonel sayının **ondalık gösterimini** buluruz.

İki bölme, iki farklı son

Solda bölme biter, sağda aynı kalan tekrar eder

3 ÷ 8 = 0,375

30 ÷ 8	→ bölüme 3	kalan	6
60 ÷ 8	→ bölüme 7	kalan	4
40 ÷ 8	→ bölüme 5	kalan	0

Kalan 0 oldu: bölme biter (sonlu).

2 ÷ 3 = 0,666...

20 ÷ 3	→ bölüme 6	kalan	2
20 ÷ 3	→ bölüme 6	kalan	2
20 ÷ 3	→ bölüme 6	kalan	2

Aynı kalan, aynı rakam: bölme bitmez (devirli).

Soldaki bölmede kalan 0 olunca bölme biter. 3 ÷ 8 = 0,375 bir **sonlu ondalık gösterimdir**. Sağdaki bölmede ise hep aynı kalan (2) gelir, bu yüzden bölüme hep aynı rakam (6) yazılır. Bu bölme hiç bitmez.

Tanım Devirli ondalık gösterim

Virgülden sonraki bir rakamın ya da rakam grubunun sonsuza kadar aynı sırayla tekrar ettiği ondalık gösterime devirli ondalık gösterim denir. Tekrar eden kısma **devreden kısım** denir ve üstüne çizgi çekilir: $0,666\ldots = 0,\overline{6}$.

Başka örnekler: $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$; $\frac{5}{11} = 0,4545\ldots = 0,\overline{45}$; $\frac{1}{6} = 0,1666\ldots = 0,1\overline{6}$. Son örnekte 1 tekrar etmez, yalnızca 6 tekrar eder. Çizgi yalnızca tekrar eden kısmın üstüne çekilir.

Tuzağa düşme!

Çizgi nereye çekilir?

$0,1666\ldots$ sayısını $0,\overline{16}$ diye yazmak yanlıştır; bu gösterim $0,161616\ldots$ demektir. Çizgi yalnızca tekrar eden rakamların üstüne çekilir: $0,1\overline{6}$.

Paydayı 10, 100, 1000 Yapmak

Paydası 10, 100, 1000 gibi 10'un kuvveti olan kesirlerin ondalık gösterimini hemen yazarız. Bu yüzden kesri genişleterek paydada 10'un bir kuvvetini elde etmeye çalışırız:

- $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = 0,4$
- $\frac{7}{20} = \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 0,35$
- $\frac{1}{8} = \frac{1 \times 125}{8 \times 125} = \frac{125}{1000} = 0,125$

- $-\frac{3}{4} = -\frac{3 \times 25}{4 \times 25} = -\frac{75}{100} = -0{,}75$

Bu yöntem her kesirde işe yaramaz. $\frac{1}{3}$'ün paydası 3'tür. 3'ü hangi doğal sayıyla çarparsak çarpalım 10, 100 ya da 1000 elde edemeyiz. Bunun nedeni paydaların **asal çarpanlarında** saklıdır.

Paydaların Sırrı

10 = 2 × 5, 100 = 2 × 2 × 5 × 5 ve 1000 = 2 × 2 × 2 × 5 × 5 × 5'tir. 10'un kuvvetlerinin asal çarpanları yalnızca 2 ve 5'tir. Aşağıdaki tabloda kesirler en sade hâlindedir. Paydaların asal çarpanlarıyla ondalık gösterimleri karşılaştırınız:

Rasyonel sayı	Paydanın asal çarpanları	Ondalık gösterim
$\frac{3}{4}$	2 × 2	0,75 (sonlu)
$\frac{7}{25}$	5 × 5	0,28 (sonlu)
$\frac{9}{40}$	2 × 2 × 2 × 5	0,225 (sonlu)
$\frac{2}{3}$	3	$0,\overline{6}$ (devirli)
$\frac{5}{6}$	2 × 3	$0,8\overline{3}$ (devirli)
$\frac{3}{7}$	7	$0,\overline{428571}$ (devirli)

Sonlu mu, devirli mi?

Rasyonel sayıyı önce **en sade hâline** getiriniz. Paydanın asal çarpanları yalnızca 2'lerden, yalnızca 5'lerden ya da 2 ve 5'lerden oluşuyorsa ondalık gösterim **sonludur**. Paydada 2 ve 5'ten başka bir asal çarpan (3, 7, 13 gibi) bulunuyorsa ondalık gösterim **devirlidir**.

Tuzağa düşme!

Önce sadeleştiriniz

$\frac{6}{15}$ kesrinin paydasında 3 vardır ama $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ sonludur. Paydaya bakmadan önce kesri sadeleştirmeyi unutmayınız.

Bir bölmede kalan her zaman bölenden küçüktür. 7'ye bölerken kalan yalnızca 0, 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6 olabilir. Kalan hiç 0 olmazsa en geç 6 adım sonra daha önce görülen bir kalan yeniden gelir ve bölümdeki rakamlar aynı sırayla tekrar etmeye başlar. Bu yüzden **her rasyonel sayının ondalık gösterimi ya sonludur ya da devirlidir.**

Ondalık Gösterimden Rasyonel Sayıya

Sonlu ondalık gösterimler: Virgülden sonraki basamak sayısı kadar sıfırı olan bir payda yazar, sonra sadeleştiririz: $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ ve $-1{,}6 = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5}$.

Devirli ondalık gösterimler: Önce bir örüntüyü inceleyelim. Aşağıdaki rasyonel sayıların ondalık gösterimlerini hesap makinesiyle doğrulayınız:

Rasyonel sayı	Ondalık gösterim
$\frac{1}{9}$	$0{,}\overline{1}$
$\frac{4}{9}$	$0{,}\overline{4}$
$\frac{1}{99}$	$0{,}\overline{01}$
$\frac{13}{99}$	$0{,}\overline{13}$
$\frac{245}{999}$	$0{,}\overline{245}$

Devreden kısım virgülden hemen sonra başlıyorsa devreden rakamlar paya, devreden basamak sayısı kadar 9 da paydaya yazılır: $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$ ve $0{,}\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$. Devretmeyen bir kısım da varsa aşağıdaki kural kullanılır:

Devirli ondalık gösterimi rasyonel sayıya çevirme

- **Pay:** Virgülü ve çizgiyi yok sayarak okunan sayıdan, devretmeyen kısımdan oluşan sayı çıkarılır.
- **Payda:** Virgülden sonra devreden her basamak için bir 9, devretmeyen her basamak için bir 0 yazılır; önce 9'lar, sonra 0'lar gelir.

Devirli gösterimden rasyonel sayıya

Turuncu: devretmeyen kısım, mavi: devreden kısım



Örnekler:

- $0{,}1\overline{6}$: Pay 16 − 1 = 15, payda 90. $0{,}1\overline{6} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.
- $2{,}\overline{3}$: Pay 23 − 2 = 21, payda 9. $2{,}\overline{3} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$.
- $0{,}3\overline{18}$: Pay 318 − 3 = 315, payda 990. $0{,}3\overline{18} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$.

Bir tartışma: $0,\overline{9} = 1$ mi?

Kurala göre $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ olur. Bu sonuç ilk anda tuhaf gelir. Başka bir yoldan bakalım: $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ olduğuna göre iki tarafın 3 katını alırsak $3 \times \frac{1}{3} = 1$ ve $3 \times 0,333\ldots = 0,999\ldots$ olur. Ayrıca $0,\overline{9}$ ile 1 arasına yerleştirebileceğiniz hiçbir sayı yoktur. Sayı doğrusunda aralarında hiç sayı olmayan iki nokta aynı noktadır. Yani $0,\overline{9} = 1$'dir.

Çözümlü örnek 4

Soru: Bir pastanede 1 kg un 8 eşit pakete bölünüyor. Başka bir pastanede 2 kg şeker 3 eşit pakete bölünüyor. Her paketin kütlesini kilogram cinsinden ondalık gösterimle yazınız. Hangi paketin kütlesi sonlu bir ondalık gösterimle ifade edilir?

Anlayalım. Un paketi $\frac{1}{8}$ kg, şeker paketi $\frac{2}{3}$ kg'dır.

Planlayalım. Paydaların asal çarpanlarına bakalım, sonra ondalık gösterimleri bulalım.

Çözelim. $8 = 2 \times 2 \times 2$ olduğundan $\frac{1}{8}$ sonludur: $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125$ kg. 3, 2 ve 5'ten farklı bir asal sayıdır; $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ kg devirlidir. Sonlu gösterimle yazılan un paketidir.

Kontrol edelim. $8 \times 0,125 = 1$ ve $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ olduğundan sonuçlar doğrudur.

5 Rasyonel Sayılarda Karşılaştırma ve Sıralama

MERAK KAPISI

Bir kış sabahı beş şehirde ölçülen sıcaklıklar şöyle: Kars −11 °C, Erzurum −14 °C, Sivas −6,5 °C, Ankara −2 °C ve İzmir 8 °C. Mehmet "−14, −11'den büyüktür; çünkü 14, 11'den büyüktür." diyor. **Mehmet haklı mı? Şehirleri en soğuktan en sıcağa nasıl sıralarsınız?**

Sayı Doğrusunda Sağdaki Büyüktür

Sayı doğrusunda sağa gidildikçe sayılar büyür, sola gidildikçe küçülür. Bu kural tam sayılar ve bütün rasyonel sayılar için geçerlidir.

Soldan sağa büyüyen sayılar

Ok yönünde sayılar büyür



Buna göre:

- Her pozitif sayı 0'dan büyüktür; 0 da her negatif sayıdan büyüktür.
- Her pozitif sayı her negatif sayıdan büyüktür: $\frac{1}{100} > -50$.

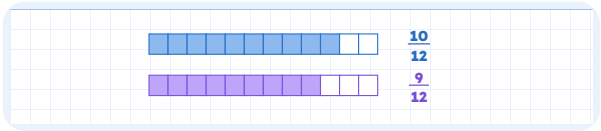
- İki negatif sayıdan mutlak değeri küçük olan daha büyüktür: 2 < 11 olduğundan −2 > −11.

"<" ve ">" sembollerinin açık ucu büyük sayıya bakar: −14 < −11 ("−14, −11'den küçüktür") ya da −11 > −14 ("−11, −14'ten büyüktür").

Kesirli Rasyonel Sayıları Karşılaştırmak

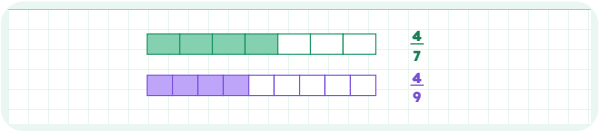
Kesirleri karşılaştırırken 5 ve 6. sınıfta kullandığınız stratejiler rasyonel sayılarda da işe yarar:

PAYDALARI EŞİTLEMEK



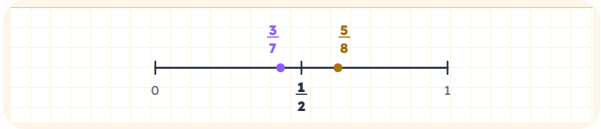
$\frac{5}{6}$ ile $\frac{3}{4}$ için paydaları 12 yapalım: $\frac{10}{12} > \frac{9}{12}$ olduğundan $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$.

PAYLARI EŞİTLEMEK



$\frac{4}{9}$ ile $\frac{4}{7}$: Paylar eşitse paydası küçük olan büyüktür, çünkü parçaları daha büyüktür. $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$.

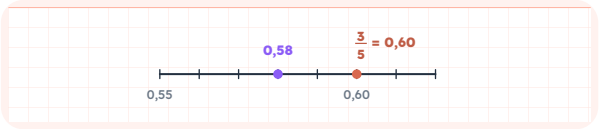
KIYAS NOKTASI



$\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$'den büyük; $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{2}$'den küçüktür.

Öyleyse $\frac{5}{8} > \frac{3}{7}$.

ONDALIĞA ÇEVİRMEK



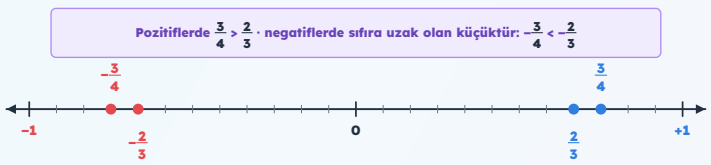
$\frac{3}{5}$ ile 0,58: $\frac{3}{5}$ = 0,60 ve 0,60 > 0,58 olduğundan $\frac{3}{5}$ > 0,58.

Negatif Sayılarda Sıra Ters Döner

$-\frac{3}{4}$ ile $-\frac{2}{3}$ sayılarını karşılaştıralım. Önce mutlak değerlerine bakalım: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ ve $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. $-\frac{3}{4}$ sıfıra daha uzaktır, yani sayı doğrusunda daha soldadır. Bu yüzden $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3}$.

Negatiflerde sıfıra uzak olan küçüktür

Birim 12 eş parçaya bölünmüştür



Tuzağa düşme!

Büyük rakamlar, küçük sayı

"$-\frac{7}{8}$ sayısının rakamları büyük; öyleyse $-\frac{7}{8} > -\frac{1}{8}$" düşüncesi yanlıştır. Negatif sayılarda sıfıra uzak olan daha küçüktür: $-\frac{7}{8} < -\frac{1}{8}$.

Sıralama

Birden çok sayıyı sıralarken önce negatifleri, 0'ı ve pozitifleri ayrı gruplara ayırırız. Sonra her grubu kendi içinde sıralarız.

Çözümlü örnek 5

Soru: $-1{,}2;\ \frac{1}{4};\ -\frac{5}{4};\ 0;\ \frac{3}{10};\ -\frac{1}{2}$ sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

Anlayalım. Üç negatif sayı, sıfır ve iki pozitif sayı vardır.

Planlayalım. Kesirli sayıları ondalık gösterime çevirip karşılaştıralım.

Çözelim. $-\frac{5}{4} = -1{,}25$; $-\frac{1}{2} = -0{,}5$; $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$. Negatiflerde mutlak değeri büyük olan küçüktür: $-1{,}25 < -1{,}2 < -0{,}5$. Pozitiflerde $0{,}25 < 0{,}3$'tür. Sıralama: $-\frac{5}{4} < -1{,}2 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{3}{10}$.

Kontrol edelim. Sayıları sayı doğrusuna yerleştirdiğimizde soldan sağa bu sırayla dizilirler.

İki Rasyonel Sayı Arasında

-3 ile -2 gibi peş peşe gelen iki tam sayının arasına hiçbir tam sayı sığmaz. Rasyonel sayılarda durum farklıdır. $\frac{3}{5}$ ile $\frac{4}{5}$ arasına bakalım. İki kesri $\frac{6}{10}$ ve $\frac{8}{10}$ olarak yazarsak arada $\frac{7}{10}$ görünür. $\frac{30}{50}$ ve $\frac{40}{50}$ olarak yazarsak arada $\frac{31}{50}$, $\frac{32}{50}$, …, $\frac{39}{50}$ gibi dokuz sayı görünür. Paydayı büyüttükçe araya daha çok sayı sığar.

Tam sayılarda da aynı şey olur: -5 ile -4'ün tam ortasında $-4{,}5$ vardır; $-4{,}5$ ile -4'ün tam ortasında $-4{,}25$ vardır. Bu arayış hiç bitmez.

Genelleme

İki farklı rasyonel sayı birbirine ne kadar yakın olursa olsun aralarında daima başka bir rasyonel sayı bulunur. Bu yüzden iki rasyonel sayı arasında **sonsuz sayıda** rasyonel sayı vardır.

6 Tam Sayılarla Toplama ve Çıkarma

MERAK KAPISI

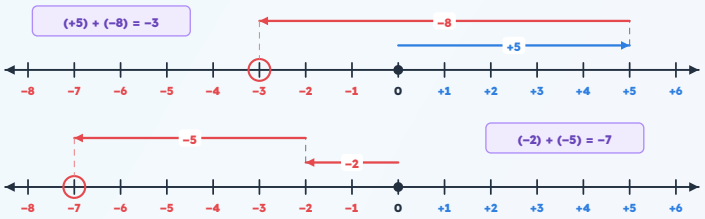
Bir dalgıç suyun 2 metre altındayken 5 metre daha aşağı dalıyor, sonra 3 metre yukarı çıkıyor. Selin "Dalgıç şimdi 2 + 5 + 3 = 10 metre derinde." diyor. **Selin'in hesabındaki yanlış ne? Dalgıç şimdi nerededir?**

Sayı Doğrusunda Toplama

Tam sayılarla toplamayı sayı doğrusunda bir **hareket** olarak düşünebiliriz. Birinci sayının bulunduğu noktadan başlarız. İkinci sayı pozitifse sağa, negatifse sola doğru, ikinci sayının mutlak değeri kadar ilerleriz.

Sayı doğrusunda toplama

Pozitif: sağa, negatif: sola



Şekildeki işlemlerin sonuçları: (+5) + (−8) = −3 ve (−2) + (−5) = −7.

Sayma Pulları ve Sıfır Çifti

Sayma pullarında sarı pul +1'i, kırmızı pul −1'i gösterir. Bir sarı pul ile bir kırmızı pul bir araya gelince birbirini götürür: (+1) + (−1) = 0. Bu ikiliye **sıfır çifti** denir.

Sayma pullarıyla (+4) + (−6)

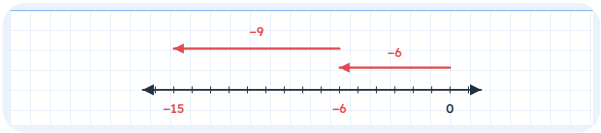
Sarı: +1, kırmızı: −1



(+4) + (−6) işleminde 4 sıfır çifti oluşur ve geriye 2 kırmızı pul kalır; sonuç −2'dir. Bir sayıyla ters işaretlisinin toplamı her zaman 0'dır: 9 + (−9) = 0.

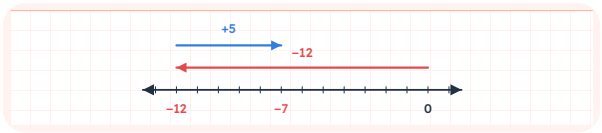
Modellerle yaptığımız çalışmalar bizi iki kurala götürür:

AYNI İŞARETLİLER



Mutlak değerler toplanır, ortak işaret sonuca yazılır: (−6) + (−9) = −15 ve (+7) + (+4) = +11.

FARKLI İŞARETLİLER



Büyük mutlak değerden küçük olan çıkarılır; sonuca mutlak değeri büyük olanın işareti yazılır: (−12) + (+5) = −7.

Toplamanın özellikleri

- **Değişme:** Toplananların yeri değişince toplam değişmez: (−3) + 8 = 8 + (−3) = 5.
- **Birleşme:** Üç sayıyı toplarken hangi ikisinden başladığımız sonucu değiştirmez: [(−4) + (−6)] + 9 = (−4) + [(−6) + 9] = −1.
- **Etkisiz eleman:** Bir sayıya 0 eklemek onu değiştirmez: (−15) + 0 = −15.
- **Ters eleman:** Her sayının, toplamı 0 yapan bir ters işaretlisi vardır: 11 + (−11) = 0.

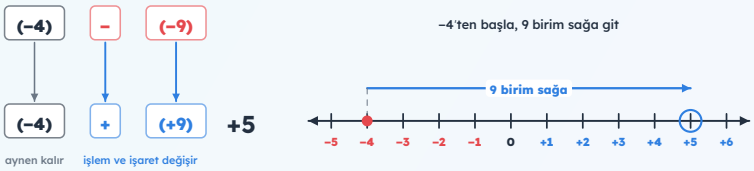
Çıkarma: Ters İşaretlisini Eklemek

(+2) − (+6) ile (+2) + (−6) işlemlerini sayı doğrusunda yapalım. İkisinde de +2'den başlayıp 6 birim sola gideriz ve −4'e ulaşırız. Demek ki **bir sayıyı çıkarmak, onun ters işaretlisini eklemekle aynıdır**: a − b = a + (−b).

- (+3) − (+8) = (+3) + (−8) = −5
- (−4) − (−9) = (−4) + (+9) = +5
- (−7) − (+2) = (−7) + (−2) = −9
- 6 − (−5) = 6 + (+5) = 11

Çıkarmayı toplamaya çevirmek

Eksilen aynen kalır, çıkanın işareti değişir



Tuzağa düşme!

Çıkarmada değişme özelliği yoktur

5 − 8 = −3 ama 8 − 5 = 3'tür. Çıkarmada sayıların yeri değişirse sonuç ters işaretlisine döner. Çok terimli işlemlerde çıkarmaları önce toplamaya çevirin; sonra değişme özelliğini rahatça kullanabilirsiniz.

Çıkarma işlemi bir **değişimi** ya da **farkı** bulmak için de kullanılır. Değişim, son değerden ilk değer çıkarılarak bulunur. Sabah −6 °C olan sıcaklık öğlen 4 °C olduysa değişim 4 − (−6) = 4 + 6 = 10 derecedir; sıcaklık 10 derece artmıştır.

Çözümlü örnek 6

Soru: Bir okul kantininin kasa defterine pazartesi +350 TL, salı −120 TL, çarşamba −480 TL, perşembe +210 TL yazılmış. Pozitif değerler kârı, negatif değerler zararı gösteriyor. Dört günün sonunda kantin kârda mı zararda mı? Kaç TL?

Anlayalım. Dört tam sayının toplamını bulmalıyız.

Planlayalım. Değişme ve birleşme özelliklerini kullanarak önce pozitifleri, sonra negatifleri toplayalım; iki sonucu birleştirelim.

Çözelim. Pozitifler: (+350) + (+210) = +560. Negatifler: (−120) + (−480) = −600. Toplam: (+560) + (−600) = −40. Kantin 40 TL zarardadır.

Kontrol edelim. Sırayla toplarsak: 350 + (−120) = 230; 230 + (−480) = −250; (−250) + 210 = −40. Aynı sonuca ulaşırız.

Notlarım

7 Tam Sayılarla Çarpma ve Bölme

MERAK KAPISI

Bir dağ istasyonunda gece yarısı sıcaklık 0 °C ölçülüyor. Sonraki her saat sıcaklık 3 derece düşüyor. Gözlemci “4 saat sonra sıcaklık 4 × 3 = 12 derece olur.” diye not alıyor. **Bu not neden yanlış? Doğru sonucu çarpma işlemiyle nasıl yazarsınız?**

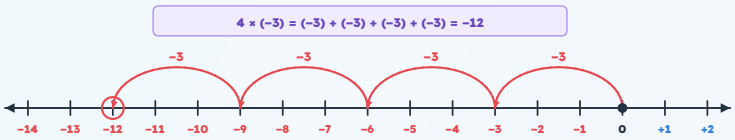
Tekrarlı Toplama Olarak Çarpma

Doğal sayılarda 4 × 3 işlemi “4 tane 3” demektir: 3 + 3 + 3 + 3. Aynı düşünceyle 4 × (−3) işlemi “4 tane −3” demektir:

4 × (−3) = (−3) + (−3) + (−3) + (−3) = −12

4 tane −3

Her sıçrama 3 birim sola



Bir pozitif tam sayı ile bir negatif tam sayının çarpımı negatiftir. Çarpmanın değişme özelliği burada da geçerlidir: (−3) × 4 = 4 × (−3) = −12.

İki Negatifin Çarpımı: Örüntüyü İzleyelim

(−2) × (−3) işlemini tekrarlı toplamayla düşünmek zordur; “−2 tane” diye bir şey yoktur. Bu yüzden bir örüntü kuralım. Sol taraftaki birinci çarpan her satırda 1 azalırken sonucun nasıl değiştiğine bakınız:

İşlem	Sonuç
3 × (−3)	−9
2 × (−3)	−6
1 × (−3)	−3
0 × (−3)	0
(−1) × (−3)	?
(−2) × (−3)	?

Her satırda birinci çarpan 1 azaldıkça sonuç 3 artıyor: −9, −6, −3, 0. Örüntü sürerse sonraki sonuçlar 3 ve 6 olur. Yani (−1) × (−3) = 3 ve (−2) × (−3) = 6’dır. **İki negatif tam sayının çarpımı pozitiftir.**

Çarpmada işaret tablosu

Aynı işaretliler: +, farklı işaretliler: −

×	+	−
+	+	−
−	−	+

satır: birinci sayı · sütun: ikinci sayı

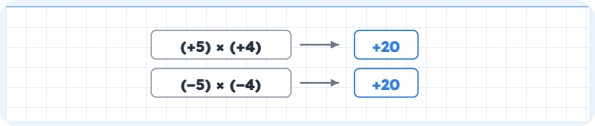
(+3) × (+2) = +6
(−3) × (−2) = +6
(+3) × (−2) = −6
(−3) × (+2) = −6

aynı işaret: +

farklı işaret: −

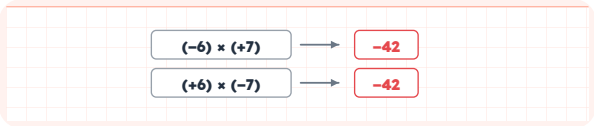
Bölmede de aynı kural geçerlidir.

AYNI İŞARETLİ



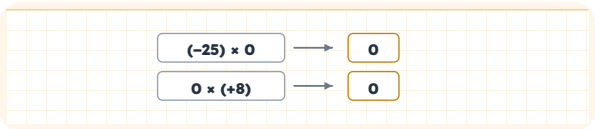
Mutlak değerler çarpılır, sonuç pozitif olur: (+5) × (+4) = +20 ve (−5) × (−4) = +20.

FARKLI İŞARETLİ



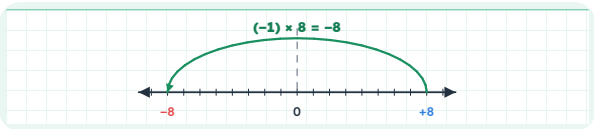
Mutlak değerler çarpılır, sonuç negatif olur: (−6) × (+7) = −42 ve (+6) × (−7) = −42.

SIFIRLA ÇARPMA



Hangi tam sayı 0 ile çarpılırsa çarpılsın sonuç 0'dır: (−25) × 0 = 0.

−1 İLE ÇARPMA



Bir sayıyı −1 ile çarpmak onu ters işaretlisine çevirir: (−1) × 8 = −8 ve (−1) × (−8) = 8.

Üç ya da daha çok sayının çarpımında negatif çarpanları sayarız. Negatif çarpan sayısı çift ise sonuç pozitif, tek ise sonuç negatiftir: (−2) × (−1) × (−5) = −10 (üç negatif çarpan).

Çarpmanın özellikleri

- **Değişme:** (−4) × 9 = 9 × (−4) = −36.
- **Birleşme:** [(−2) × 5] × (−3) = (−2) × [5 × (−3)] = 30.
- **Etkisiz eleman:** Bir sayıyı 1 ile çarpmak onu değiştirmez: (−13) × 1 = −13.
- **Toplama üzerine dağılma:** (−3) × (10 + 2) = (−3) × 10 + (−3) × 2 = −30 + (−6) = −36.

Bölme: Çarpmanın Tersi

Bölme, çarpmanın tersidir. (−12) ÷ 4 = ? sorusu "4 × ? = −12" sorusuyla aynıdır. 4 × (−3) = −12 olduğundan (−12) ÷ 4 = −3'tür. Aynı yolla (−12) ÷ (−4) = 3 çünkü (−4) × 3 = −12'dir.

Bölmede işaret kuralı çarpmadakiyle aynıdır: **aynı işaretli iki tam sayının bölümü pozitif, farklı işaretli iki tam sayının bölümü negatiftir.**

Tuzağa düşme!

Sıfıra bölme tanımsızdır

0 ÷ (−7) = 0'dır, çünkü (−7) × 0 = 0'dır. Ancak (−7) ÷ 0 tanımsızdır; 0 ile çarpılıp −7 veren bir sayı yoktur.

Üslü Nicelikler

Aynı sayının tekrarlı çarpımını kısaca **üslü nicelik** olarak yazarız. (−2) × (−2) × (−2) çarpımında −2 sayısı 3 kez çarpılmıştır. Bunu $(-2)^3$ biçiminde yazar, "eksi ikinin küpü" ya da "eksi ikinin üçüncü kuvveti" diye okuruz.

- $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
- $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$
- $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

Negatif bir sayının **çift** kuvveti pozitif, **tek** kuvveti negatiftir.

Tuzağa düşme!

$(-2)^4$ ile -2^4 aynı değildir

$(-2)^4$ yazımında ayraç, -2'nin tamamının dört kez çarpıldığını söyler: $(-2)^4 = 16$. -2^4 yazımında ise yalnızca 2 dört kez çarpılır, sonra önüne eksi işareti konur: $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$.

Çözümlü örnek 7

Soru: Bir dalgıç, yüzeyden başlayarak her dakika 4 m aşağı iniyor. 6 dakika sonra dalgıç kaç metre derinliktedir? Sonra her dakika 3 m yukarı çıkarak yüzeye ulaşıyor. Yüzeye çıkışı kaç dakika sürer?

Anlayalım. Aşağı iniş negatif, yukarı çıkış pozitif değişimdir. Yüzey 0 noktasıdır.

Planlayalım. İnişi çarpmayla, çıkış süresini bölmeyle bulalım.

Çözelim. $6 \times (-4) = -24$. Dalgıç 24 m derinliktedir. Yüzeye çıkmak için $+24$ m'lik değişim gerekir: $24 \div 3 = 8$. Çıkış 8 dakika sürer.

Kontrol edelim. $(-24) + 8 \times 3 = (-24) + 24 = 0$; dalgıç yüzeydedir.

8 Rasyonel Sayılarla Dört İşlem

MERAK KAPISI

Deniz $\frac{3}{4}$ m uzunluğundaki bir kurdeleyi $\frac{1}{8}$ m'lik parçalara kesecek. Kardeşi "Kesirlerle bölme yapınca sayı küçülür; o hâlde parça sayısı $\frac{3}{4}$'ten az olur." diyor. **Bu düşünce doğru mu? Kaç parça elde edilir?**

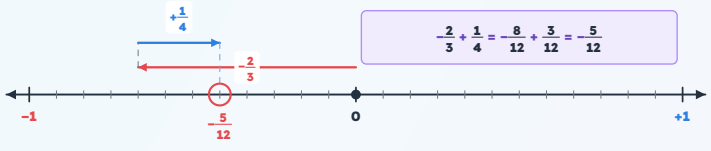
Toplama ve Çıkarma

Tam sayılarda kullandığımız işaret kuralları rasyonel sayılarda da aynen geçerlidir. Paydalar eşit değilse önce paydaları eşitleriz:

- $-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = -\frac{5}{12}$
- $\frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{2}{12} + \left(-\frac{9}{12}\right) = -\frac{7}{12}$
- $-1\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{15}{10} + \left(-\frac{4}{10}\right) = -\frac{19}{10}$

Sayı doğrusunda kesirlerle toplama

Birim 12 eş parçaya bölünmüştür



Ondalık gösterimle verilen rasyonel sayılarda virgüller alt alta gelecek biçimde yazıp işlem yaparız, sonra işareti kurallara göre belirleriz: (−3,75) + 1,5 = −2,25.

Çarpma ve Bölme

İki rasyonel sayıyı çarparken paylar çarpılıp paya, paydalar çarpılıp paydaya yazılır. İşaret, tam sayılardaki kurala göre belirlenir:

- $(-\frac{2}{3}) \times \frac{3}{5} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$
- $(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{8}{9}) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Çarpmadan önce sadeleştirmek işlemi kolaylaştırır: $(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{8}{9})$ işleminde 3 ile 9'u 3'e, 8 ile 4'ü 4'e bölerek $\frac{1}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ sonucuna kısa yoldan ulaşırız.

Tanım Çarpmaya göre ters

Çarpımları 1 olan iki rasyonel sayıdan her biri diğerinin çarpmaya göre tersidir. $\frac{a}{b}$ sayısının ($a \neq 0, b \neq 0$) çarpmaya göre tersi $\frac{b}{a}$'dır: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ ve $(-\frac{4}{7}) \times (-\frac{7}{4}) = 1$.

Tuzağa düşme!

0'ın çarpmaya göre tersi yoktur

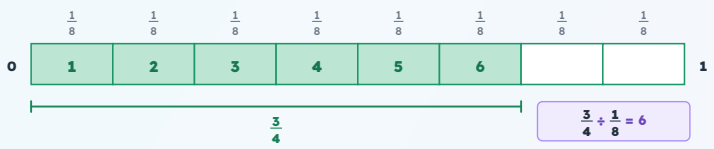
Hangi sayıyı 0 ile çarparsak çarpalım sonuç 0 olur, asla 1 olmaz. Bu yüzden 0'ın çarpmaya göre tersi yoktur. Bir sayının çarpmaya göre tersi kendi işaretini korur; $-\frac{2}{9}$'un tersi $-\frac{9}{2}$'dir, $\frac{9}{2}$ değildir.

Bölme: Bir rasyonel sayıyı başka bir rasyonel sayıya bölmek, birinciyi ikincinin çarpmaya göre tersiyle çarpmaktır:

- $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$
- $(-\frac{5}{6}) \div \frac{2}{3} = (-\frac{5}{6}) \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$
- $(-6) \div (-\frac{3}{5}) = (-6) \times (-\frac{5}{3}) = \frac{30}{3} = 10$

Üç çeyrekte kaç tane sekizde bir var?

Her küçük parça $\frac{1}{8}$



İşlem özellikleri rasyonel sayılarda da geçerlidir

- Toplamada ve çarpmada **değişme** ve **birleşme** özellikleri vardır.
- Toplamada etkisiz eleman **0**, çarpmada etkisiz eleman **1**'dir.
- Her rasyonel sayının toplamaya göre tersi (ters işaretlisi) vardır: $\frac{5}{8} + (-\frac{5}{8}) = 0$.
- 0 dışındaki her rasyonel sayının çarpmaya göre tersi vardır.
- Çarpma, toplama ve çıkarma üzerine dağılır: $\frac{2}{3} \times (6 - \frac{3}{4}) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Rasyonel Sayıların Kuvvetleri

Bir rasyonel sayının kuvvetini alırken pay ve payda ayrı ayrı o kuvvete yükseltilir. İşaret kuralı tam sayılarla aynıdır:

- $(-\frac{2}{3})^2 = (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$
- $(-\frac{1}{2})^3 = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$
- $(0{,}3)^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

Çözümlü örnek 8

Soru: Bir su deposunun $\frac{2}{5}$'i dolu. Depodan önce toplam hacmin $\frac{1}{4}$'ü kadar su kullanılıyor, sonra toplam hacmin $\frac{3}{10}$'u kadar su ekleniyor. Son durumda deponun ne kadarı doludur?

Anlayalım. Kullanılan su negatif, eklenen su pozitif değişimdir.

Planlayalım. Bütün kesirleri paydası 20 olacak biçimde genişletelim.

Çözelim. $\frac{2}{5} + (-\frac{1}{4}) + \frac{3}{10} = \frac{8}{20} + (-\frac{5}{20}) + \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$. Deponun $\frac{9}{20}$'si doludur.

Kontrol edelim. $\frac{9}{20} = 0{,}45$; başlangıçtaki 0,4'ten 0,25 çıkarıp 0,3 eklersek 0,4 − 0,25 + 0,3 = 0,45 olur.

9 Çok Adımlı İşlemler ve Problem Çözme

MERAK KAPISI

Öğretmen tahtaya $8 - 2 \times (-3)$ işlemini yazıyor. Ali soldan başlayıp $8 - 2 = 6$, sonra $6 \times (-3) = -18$ buluyor. Zeynep önce $2 \times (-3) = -6$ hesaplıyor, sonra $8 - (-6) = 14$ buluyor. **Hangisinin sonucu doğrudur? Neden?**

İşlem Önceliği

Birden çok işlem içeren ifadelerde herkesin aynı sonuca ulaşması için bir **işlem sırası** üzerinde anlaşırız:

İşlem sırası

Aynı basamaktaki işlemler soldan sağa yapılır



Kesir çizgisi de bir ayraç gibi davranır: $\frac{-6+2}{4-8}$ ifadesinde önce pay ($-6+2=-4$) ve payda ($4-8=-4$) ayrı ayrı hesaplanır, sonra bölme yapılır: $\frac{-4}{-4}=1$.

Çözümlü örnek 9

Soru: a) $(-3)^2-12\div(-4)$ b) $[(-3)^2-12]\div(-4)$ işlemlerinin sonuçlarını bulunuz. Ayraç sonucu nasıl değiştirmiştir?

Anlayalım. İki ifadede de aynı sayılar ve aynı işlemler vardır; yalnızca ayraçlar farklıdır.

Planlayalım. Her ifadede işlem sırasını uygulayalım. Her ifade üç adımda biter.

Çözelim.

- a) Üs: $(-3)^2=9$. Bölme: $12\div(-4)=-3$. Çıkarma: $9-(-3)=9+3=12$.
- b) Üs: $(-3)^2=9$. Ayraç içi: $9-12=-3$. Bölme: $(-3)\div(-4)=\frac{3}{4}$.

Kontrol edelim. a'da bölme çıkarmadan önce yapılır. b'de ayraç, çıkarmanın önce yapılmasını sağlar. Ayraç işlem sırasını değiştirdiği için sonuçlar farklıdır: 12 ve $\frac{3}{4}$.

Problem Çözme Stratejileri

Gerçek hayat problemlerinde önce durumu anlamak, sonra uygun işlemleri seçmek gerekir. İşinize yarayacak stratejiler:

ŞEKİL ÇİZMEK



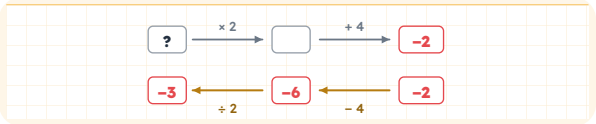
Sıcaklık, derinlik ya da kat problemlerinde dikey bir sayı doğrusu çizmek hareketleri görünür kılar.

TABLO YAPMAK

gün	değişim	toplam
1	+350	350
2	−120	230

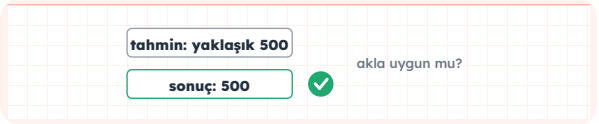
Gelir-gider ve tasarruf problemlerinde her adımı bir tabloya yazmak kaybolan işareti önler.

GERİYE DOĞRU ÇALIŞMAK



Sonucu bilinen problemlerde işlemleri sondan başa, ters işlemlerle yapmak başlangıç değerini verir.

TAHMİN VE KONTROL



Önce yaklaşık sonucu tahmin etmek, bulunan cevabın akla uygun olup olmadığını gösterir.

Çözümlü örnek 10

Soru: Bir öğrencinin aylık harçlığı 1 200 TL'dir. Harçlığının $\frac{1}{4}$'ünü yemeğe, $\frac{1}{3}$'ünü ulaşıma harcıyor, kalan parayı kumbarasına atıyor. Öğrenci her ay kaç TL biriktirir?

Anlayalım. Harçlığın bir bütün olduğunu, harcamaların bu bütünün kesirleri olduğunu düşünelim.

Planlayalım. Önce harcanan kesri, sonra kalan kesri bulalım; en son kalan kesri 1 200 ile çarpalım. Tek ifade: $1\,200 \times [1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{3})]$.

Çözelim. Ayraç içi: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$. Köşeli ayraç: $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$. Çarpma: $1\,200 \times \frac{5}{12} = 500$. Öğrenci her ay 500 TL biriktirir.

Kontrol edelim. Yemek $1\,200 \times \frac{1}{4} = 300$ TL, ulaşım $1\,200 \times \frac{1}{3} = 400$ TL. $300 + 400 + 500 = 1\,200$ TL harçlığa eşittir.

Genelleme ve Problem Kurma

Bir sayıdan negatif bir sayı çıkarmanın sonucu nasıl etkilediğini düşünelim: $5 - (-2) = 7$, $5 - (-4) = 9$, $5 - (-10) = 15$. Her örnekte sonuç 5'ten büyüktür. **Genelleme:** Bir sayıdan negatif bir sayı çıkarıldığında sonuç o sayıdan büyük olur. Benzer biçimde, bir pozitif sayıyı 0 ile 1 arasındaki bir sayıya böldüğümüzde sonuç büyür.

Bir işlemden yola çıkarak problem de kurabilirsiniz. Örneğin $(-4) \times 3 + 5$ işlemi için: "Bir şehirde sıcaklık 3 saat boyunca her saat 4 derece düştü, sonra 5 derece yükseldi. Başlangıçta sıcaklık 0 °C olduğuna göre son sıcaklık kaç derecedir?" Cevap: $-12 + 5 = -7$ °C.

Yazılıya Son Bakış

Temanın kavram haritası

Kapsayan kümeden ayrıntıya



Soru tipi	Kullanılacak araç	Sık yapılan hata
Durumu tam sayıyla ifade etme	Başlangıç noktası ve yön	Borcu ya da derinliği işaretsiz yazmak
Mutlak değer	Sıfıra uzaklık	Mutlak değerin dışındaki eksiyi silmek
Sonlu mu, devirli mi?	Sadeleştir, paydanın asal çarpanlarına bak	Sadeleştirmeden karar vermek
Devirli gösterimi rasyonele çevirme	Pay: tamamı – devretmeyen, payda: 9'lar ve 0'lar	Çizgiyi yanlış rakamların üstüne çekmek
Negatifleri sıralama	Sıfıra uzak olan küçüktür	–8'i –3'ten büyük sanmak
Çıkarma	Ters işaretlisini ekle	Çıkanın işaretini değiştirmeyi unutmak
Çarpma ve bölme	Aynı işaret +, farklı işaret –	Negatif çarpanları saymamak
Üslü nicelik	Ayraç tabanı belirler	$(-2)^4$ ile -2^4'ü karıştırmak
Rasyonel sayılarla bölme	Bölenin çarpmaya göre tersiyle çarp	Bölüneni ters çevirmek
Çok adımlı işlem	Ayraç, üs, çarpma-bölme, toplama-çıkarma	Soldan sağa sırayla yapmak

Notlarım