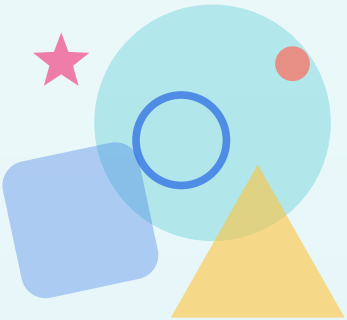
Talim Noktası.

7. Sınıf

Matematik

Dikdörtgenler prizmasının yüzey açınımı ve yüzey alanı

2. Tema: Geometrik Nicelikler (1) · Konu 02 · Konu Anlatımı





2. TEMA

Dikdörtgenler prizmasının yüzey açınımı ve yüzey

Bu temada neler var?

1 Prizmayı Açalım: Yüzey Açınımı 4
2 Açınımdan Yüzey Alanına 8
3 Yüzey Alanı Problemleri 11
★ Konu Testi 15
★ Cevap Anahtarı 17

Bir arkadaşınıza hediye aldınız ve kutuyu paket kâğıdıyla kaplamak istiyorsunuz. Elinizdeki kâğıt yeter mi? Kâğıdı israf etmeden en az ne kadar kâğıt gerekir? Bu sorunun cevabı kutunun **yüzey alanında** saklıdır. Önceki konuda eş küplerle yapılar kurdunuz. Bu konuda dikdörtgenler prizması biçimindeki kutuları açarak düzleme serecek, açınımdan yararlanarak yüzey alanını hesaplayacaksınız.

Bu bölümde

- Dikdörtgenler prizmasının yüzlerini, ayrıtlarını ve köşelerini hatırlayacaksınız.
- Aynı prizmanın farklı yüzey açınımlarını inceleyeceksiniz.
- Yüzey açınımı ile yüzey alanı arasındaki ilişkiyi açıklayacaksınız.
- Dikdörtgenler prizmasının, kare prizmanın ve küpün yüzey alanını hesaplayıp problemler çözeceksiniz.

Anahtar kavramlar

dikdörtgenler prizması · kare prizma · küp · yüz · ayrıt · köşe · yüzey açınımı · yüzey alanı

Etkinlik 1

Ön değerlendirme: Ne düşünüyorsunuz?

Doğru ifadelerin yanına **D**, yanlış ifadelerin yanına **Y** yazınız. Yanlış bulduğunuz ifadeyi düzelterek yeniden yazınız.

1. Dikdörtgenler prizmasının 6 yüzü vardır.
2. Bir dikdörtgenler prizmasının karşılıklı yüzleri eştir.
3. Bir kutunun yalnız tek bir yüzey açınımı vardır.
4. Küpün bütün ayrıtları eşit uzunluktadır.
5. Kare prizmanın bütün yüzleri karedir.

Zorlandıysanız: Dikdörtgenin alanının kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı olduğunu hatırlayınız. Örneğin kenarları 5 cm ve 3 cm olan dikdörtgenin alanı 15 cm²'dir.

Notlarım



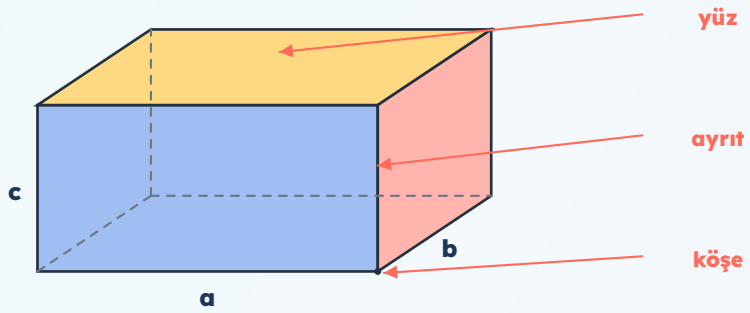
1 Prizmayı Açalım: Yüzey Açınımı

Dikdörtgenler prizmasının elemanları

Ayakkabı kutusu, tuğla, buzdolabı gibi nesneler **dikdörtgenler prizması** biçimindedir. Bir dikdörtgenler prizmasının **6 yüzü**, **12 ayrıtı** ve **8 köşesi** vardır. Yüzlerinin hepsi dikdörtgendir ve **karşılıklı yüzleri eştir**. Prizmanın birbirine dik üç ayrıtının uzunluklarını genellikle a, b ve c ile gösteririz.

Yüz, ayrıt ve köşe

Kesikli çizgiler görünmeyen ayrıtlardır



Notlarım

AYAKKABI KUTUSU



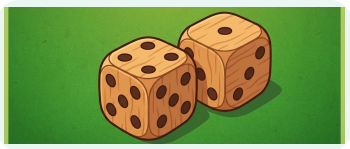
Üç ayrıtı da farklı uzunlukta olabilir: Bu bir **dikdörtgenler prizmasıdır**.

DİŞ MACUNU KUTUSU



İki ucu kare, yan yüzleri eş dikdörtgen: Bu bir **kare prizmadır**.

OYUN ZARI



Altı yüzü de eş kare, bütün ayrıtları eşit: Bu bir **küptür**.

Kare prizma da küp de aslında birer dikdörtgenler prizmasıdır; yalnızca bazı ayrıtları **eşittir**. Birbirine dik üç ayrıttan kare prizmada ikisi (taban ayrıtları), küpte ise üçü de eşit uzunluktadır.

Yüzey açınımı

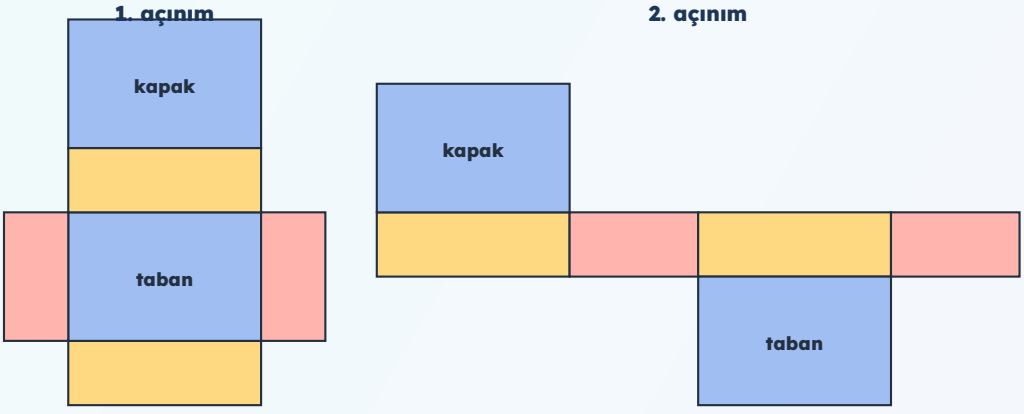
Tanım

Bir prizmanın bazı ayrıtlarından kesilip düzleme serilmesiyle elde edilen şekle yüzey açınımı denir.

Aynı kutuyu farklı ayrıtlarından keserek **farklı açınımlar** elde edebiliriz. Açınımların biçimi değişse de hepsinde aynı altı yüz vardır: Eş yüzler ikişer ikişer bulunur.

Aynı kutunun iki farklı açınımı

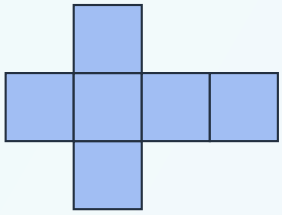
Aynı renkteki yüzler eştir



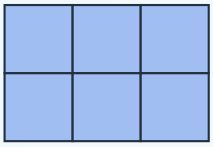
Bir şeklin açınım olabilmesi için katlandığında yüzlerin **üst üste gelmemesi** ve prizmanın **her yüzünün bir kez** oluşması gerekir.

Hangisi küp açınımıdır?

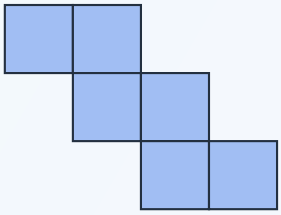
A



B



C



Örnek 1: Küp açınımı mı?

Soru: Yukarıdaki A, B ve C şekillerinden hangileri katlandığında bir küp oluşturur?

Çözüm: A şeklinde ortadaki dört kare bir şerit gibi katlanıp yan yüzleri oluşturur, üstteki ve alttaki kareler kapak olur: Küp oluşur. **C** şeklinde kareler basamak gibi dizilmiştir. Katlandığında her kare ayrı bir yüze gelir: Küp oluşur. **B** şeklinde altı kare 2'ye 3'lük bir dikdörtgen oluşturmuştur. Katlamaya çalıştığımızda bazı kareler üst üste gelir, iki yüz ise açıkta kalır: Küp oluşmaz. Cevap **A ve C**'dir.

Ne öğrendik?

1. Bir dikdörtgenler prizmasının kaç yüzü, kaç ayrıtı ve kaç köşesi vardır?

2. Ayrıtları 7 cm, 5 cm ve 3 cm olan bir kutunun yüzlerinin ölçülerini yazınız. Her ölçüden kaç yüz vardır?

3. Bir kare prizmanın kaç yüzü kare, kaç yüzü dikdörtgendir? (Kare prizmanın yüksekliği taban ayrıtından farklıdır.)

4 Bir dikdörtgenler prizmasının yüzey açınımları için aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

A) Altı yüzün hepsi farklı ölçülerdedir.
B) Eş yüzler ikişer ikişer bulunur.
C) Her prizmanın yalnız bir açınımı vardır.
D) Açınımda dört yüz bulunur.

Notlarım



2 Açınımdan Yüzey Alanına

Bir kutuyu kâğıtla kaplarken kâğıt kutunun **bütün yüzlerini** örter. Kutuyu açtığımızda elde ettiğimiz açınımın alanı, kaplamak için gereken en az kâğıt miktarına eşittir.

Tanım

Bir prizmanın bütün yüzlerinin alanları toplamına yüzey alanı denir. Yüzey alanı, prizmanın yüzey açınımının alanına eşittir.

Örnek 2: Hediye kutusu

Soru: Ayrıtları 20 cm, 12 cm ve 8 cm olan bir hediye kutusunu kaplamak için en az kaç santimetrekare paket kâğıdı gerekir?

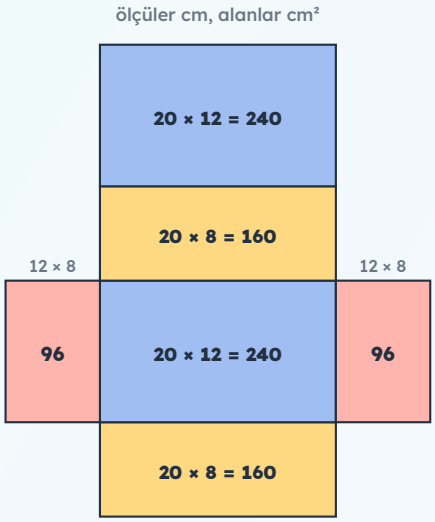
Çözüm: Kutunun açınımında üç çeşit dikdörtgen vardır ve her birinden ikişer tane bulunur.

- 20 cm × 12 cm = 240 cm² olan 2 yüz
- 20 cm × 8 cm = 160 cm² olan 2 yüz
- 12 cm × 8 cm = 96 cm² olan 2 yüz

Yüzey alanı 2 × 240 + 2 × 160 + 2 × 96 = 480 + 320 + 192 = **992 cm²** olur. Kısaca 2 × (240 + 160 + 96) = 2 × 496 = 992 cm² olarak da hesaplanabilir.

Notlarım

Örnek 2'nin açınımı ve yüz alanları



2 tane 240 → 480

2 tane 160 → 320

2 tane 96 → 192

Yüzey alanı = 992 cm²

Genel kural

Ayrıt uzunlukları a, b ve c olan bir dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı A ile gösterilirse:

A = 2 · (a · b + a · c + b · c)

Bu kuralı ezberlemek yerine nereden geldiğini hatırlayınız: Üç farklı yüz vardır ve her birinden iki tane bulunur.

Kare prizma ve küp

Kare prizmada taban ayrıtı a, yüksekliği h ise iki kare taban ve dört eş dikdörtgen yan yüz vardır: **A = 2 · a · a + 4 · a · h**

Küpte ayrıtı a olan altı eş kare vardır: **A = 6 · a · a**

Örnek 3: Diş macunu kutusu

Soru: Kare prizma biçimindeki bir diş macunu kutusunun taban ayrıtı 4 cm, yüksekliği 18 cm'dir. Bu kutuyu yapmak için en az kaç santimetrekare karton gerekir?

Çözüm: İki kare taban: 2 × (4 × 4) = 32 cm². Dört yan yüz: 4 × (4 × 18) = 288 cm². Yüzey alanı 32 + 288 = **320 cm²** olur.

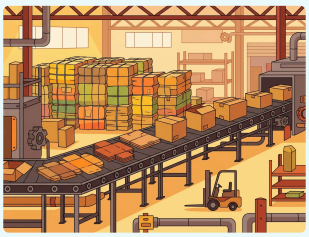
Örnek 4: Yüzey alanından ayrıta

Soru: Küp biçimindeki bir kutunun yüzey alanı 150 cm²'dir. Bu küpün bir ayrıtı kaç santimetredir?

Çözüm: Küpün altı yüzü eş olduğundan bir yüzün alanı 150 ÷ 6 = 25 cm² olur. Alanı 25 cm² olan karenin bir kenarı 5 cm'dir, çünkü 5 × 5 = 25. Küpün ayrıtı **5 cm**'dir.

Bağlantı: Ambalaj tasarımı ve tasarruf

Ambalaj tasarımcıları bir ürünü korurken **en az kartonu** kullanacak kutuyu ararlar. Kartonun her santimetrekaresi ağaç, su ve enerji demektir. Kutular fabrikalarda büyük karton levhalardan açınım biçiminde kesilir ve katlanır. Açınımlar levhaya boşluk kalmayacak biçimde yerleştirilirse daha az karton israf edilir. Kullandığımız kutuları geri dönüşüme göndermek de bu tasarrufun bir parçasıdır.



Ne öğrendik?

1. Ayrıtları 9 cm, 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgenler prizmasının yüzey alanını bulunuz.

2. Bir ayrıtı 7 cm olan küpün yüzey alanını bulunuz.

3. Taban ayrıtı 5 cm, yüksekliği 12 cm olan kare prizmanın yüzey alanını bulunuz.

4. Bir dikdörtgenler prizmasının birbirinden farklı üç yüzünün alanları 12 cm², 15 cm² ve 20 cm²'dir. Bu prizmanın yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) 47 B) 60
C) 94 D) 141

Notlarım



3 Yüzey Alanı Problemleri

Gerçek yaşamda her zaman bütün yüzleri hesaplamayız. Önce **hangi yüzlerin** kaplanacağına, boyanacağına ya da yapılacağına karar vermemiz gerekir.

Üstü açık kutular

Tanım Üstü açık kutu

Üst yüzü, yani kapağı bulunmayan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutuya **üstü açık kutu** denir. Dikdörtgenler prizmasında taban ile üst yüz dışında kalan dört yüze **yan yüz** denir. Üstü açık kutunun 1 tabanı ve 4 yan yüzü, yani 5 yüzü vardır. Yüzey alanı bu 5 yüzün alanları toplamına eşittir.

Örnek 5: Akvaryum camı

Soru: Üstü açık bir akvaryumun taban ayrıtları 60 cm ve 30 cm, yüksekliği 40 cm'dir. Bu akvaryumu yapmak için kaç santimetrekare cam gerekir?

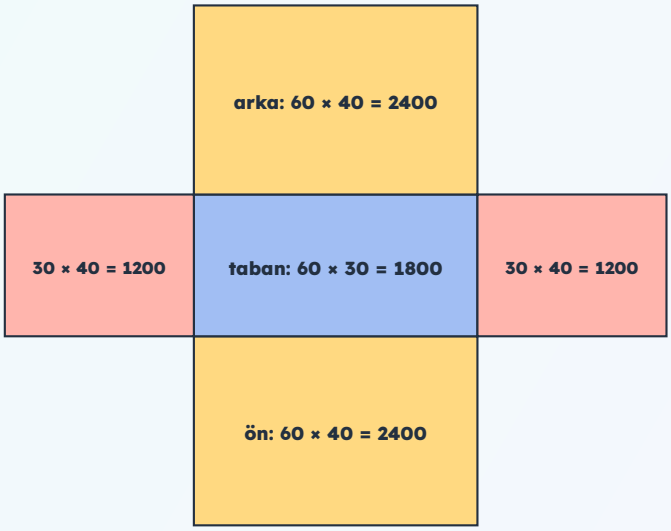
Çözüm: Akvaryumun üstü açık olduğundan **5 yüzü** vardır.

- Taban: $60 \times 30 = 1800$ cm²
- Ön ve arka yüzler: $2 \times (60 \times 40) = 4800$ cm²
- Sağ ve sol yüzler: $2 \times (30 \times 40) = 2400$ cm²

Gereken cam $1800 + 4800 + 2400 =$ **9000 cm²** olur.

Üstü açık akvaryumun açınımı

Üst yüz olmadığı için açınımda 5 yüz vardır



Boyama problemleri

Örnek 6: Odanın duvarları

Soru: Taban ayrıtları 5 m ve 4 m, yüksekliği 3 m olan bir odanın yalnız dört duvarı boyanacaktır. Duvarlardaki kapı ve pencerenin toplam alanı 6 m²'dir. Bir kutu boya 8 m² duvarı boyadığına göre en az kaç kutu boya gerekir?

Çözüm: Taban ve tavan boyanmayacağı için yalnız 4 yan yüzü hesaplarız: $2 \times (5 \times 3) + 2 \times (4 \times 3) = 30 + 24 = 54$ m². Kapı ve pencere boyanmaz: $54 - 6 = 48$ m². Gereken boya $48 \div 8 =$ **6 kutudur**.

Birleşen küpler

İki eş küp yan yana yapıştırıldığında birbirine değen iki yüz **görünmez olur**. Yeni prizmanın yüzey alanı, küplerin yüzey alanları toplamından bu iki yüzün alanı çıkarılarak bulunur.

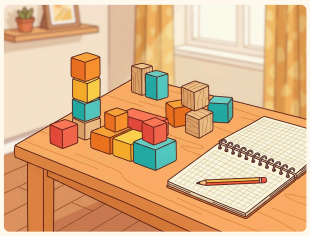
Örnek 7: Yan yana iki küp

Soru: Bir ayrıtı 4 cm olan iki eş küp yan yana yapıştırılıyor. Oluşan prizmanın yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

Çözüm: Bir küpün yüzey alanı $6 \times 16 = 96$ cm², iki küpünki 192 cm²'dir. Birbirine değen 2 yüz kaybolur: $2 \times 16 = 32$ cm². Yüzey alanı $192 - 32 =$ **160 cm²** olur. **Kontrol:** Oluşan prizmanın ayrıtları 8 cm, 4 cm ve 4 cm'dir: $2 \times (32 + 32 + 16) = 160$ cm².

Etkinlik 2

En az kartonlu kutu



Bir şekerleme firması ayrıtı 1 cm olan 24 küp şekeri boşluk kalmayacak biçimde dikdörtgenler prizması biçiminde bir kutuya yerleştirmek istiyor.

1. 24 küpü kullanarak kurulabilecek farklı dikdörtgenler prizmalarının ayrıt uzunluklarını bir tabloya yazınız. Örneğin 1 cm, 1 cm, 24 cm.
2. Her prizmanın yüzey alanını hesaplayıp tabloya ekleyiniz.
3. En az kartonla yapılabilecek kutuyu belirleyiniz.
4. En az kartonlu kutunun biçimi hakkında ne fark ettiniz? Bir cümleyle yazınız.
5. Seçtiğiniz kutunun açınımını kareli kâğıda çiziniz ve ayrıt uzunluklarını üzerine yazınız.

★ PUANLAMA ANAHTARI

Ölçüt	Tam (3)	Kısmen (2)	Henüz değil (1)
Prizmaları bulma	Altı farklı prizmanın hepsi bulunmuş	Üç, dört ya da beş prizma bulunmuş	En çok iki prizma bulunmuş
Yüzey alanı hesabı	Bütün hesaplar doğru	Bir iki hata var	Hesaplar çoğunlukla hatalı
Karar ve genelleme	En az kartonlu kutu doğru, gözlem açık	Kutu doğru, gözlem eksik	Kutu hatalı
Açınım çizimi	Açınım doğru, ölçüler yazılmış	Açınım doğru, ölçüler eksik	Açınım hatalı

Tuzağa düşme!

Yanılgı avı: Yüzey alanı

- ✗ “Yüzey alanını bulmak için üç ayrıtı çarparız: $a \cdot b \cdot c$” → ✓ Yüzey alanı **yüzlerin alanları toplamıdır**: $2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$.
- ✗ “Üç farklı yüzün alanını toplamak yeterlidir.” → ✓ Her yüzün bir **eşi** vardır, toplam 2 ile çarpılır.
- ✗ “Farklı açınımların alanları da farklıdır.” → ✓ Aynı prizmanın bütün açınımları aynı altı yüzden oluşur, alanları **eşittir**.
- ✗ “Yüzey alanı cm ile ölçülür.” → ✓ Alan birimi **cm²**, m^2 gibi kare birimlerdir.

Ne öğrendik?

1. Üstü açık bir kutunun taban ayrıtları 12 cm ve 8 cm, yüksekliği 5 cm'dir. Bu kutuyu yapmak için kaç santimetrekare karton gerekir?

2. Bir ayrıtı 2 cm olan üç eş küp yan yana yapıştırılıyor. Oluşan prizmanın yüzey alanını iki farklı yolla bulunuz.

3. Bir odanın taban ayrıtları 6 m ve 4 m, yüksekliği 3 m'dir. Yalnız dört duvar boyanacak, kapı ve pencereler 4 m^2 yer kaplıyor. Kaç metrekare duvar boyanır?

4. Ece, bir ayrıtı 10 cm olan kapalı küp biçiminde bir kutu yapmak istiyor. Elinde 550 cm^2 karton vardır. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
   A) Karton yeter, 50 cm^2 karton artar.
   B) 50 cm^2 karton eksik kalır.
   C) 450 cm^2 karton eksik kalır.
   D) 100 cm^2 karton eksik kalır.

Notlarım

Konu Testi

✓ Ne öğrendik?

Aşağıdaki soruları dikkatle okuyunuz. Her sorunun doğru seçeneğini işaretleyiniz.

1 Ayrıtları 25 cm, 10 cm ve 6 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki bir hediye kutusu paket kâğıdıyla kaplanacaktır. Bu iş için en az kaç santimetrekare paket kâğıdı gerekir?

A) 460 B) 920
C) 1500 D) 1840

2 Küp biçimindeki bir saklama kutusunun yüzey alanı 150 cm²'dir. Bu kutunun bir ayrıtı kaç santimetredir?

A) 5 B) 6
C) 15 D) 25

3 Kare prizma biçimindeki bir kalem kutusunun taban ayrıtı 3 cm, yüksekliği 16 cm'dir. Bu kutunun yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) 144 B) 192
C) 201 D) 210

4 Mert, bir kutuyu iki farklı biçimde açıp iki ayrı yüzey açınımı elde ediyor. Bu iki açınımla ilgili şu yargıları yazıyor:

I. İkisinde de altı yüz vardır.
II. İkisinin alanı birbirine eşittir.
III. İkisinin biçimi birbirinin aynısıdır.

Mert'in yargılarından hangileri iki açınım için de kesinlikle geçerlidir?

A) I ve II B) Yalnız I
C) II ve III D) Yalnız III

5 Taban ayrıtları 6 m ve 4 m, yüksekliği 3 m olan bir salonun dört duvarı ve tavanı boyanacaktır. Bir kutu boya 12 m² alanı boyadığına göre en az kaç kutu boya gerekir? (Kapı ve pencereler dikkate alınmayacaktır.)

A) 5 B) 6
C) 7 D) 9

6 Bir ayrıtı 4 cm olan iki eş küp, birer yüzleri tamamen çakışacak biçimde yan yana yapıştırılıyor. Oluşan yeni prizmanın yüzey alanı kaç santimetrekaredir?

A) 128 B) 160
C) 176 D) 192

KENDİME NOT

Bu konuda	Evet	Kısmen	Henüz değil
Dikdörtgenler prizmasının yüzlerini, ayrıtlarını ve köşelerini tanıyorum.			
Bir prizmanın farklı açınımlarını çizebiliyorum.			
Açınım ile yüzey alanı arasındaki ilişkiyi açıklayabiliyorum.			
Dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küpün yüzey alanını hesaplayabiliyorum.			
Üstü açık kutu, boyama ve birleşen küp problemlerini çözebiliyorum.			

Notlarım

Cevap Anahtarı

Ön Değerlendirme

1. D. Dikdörtgenler prizmasının 6 yüzü vardır.
2. D. Karşılıklı yüzler birbirine eştir.
3. Y. Bir kutunun birden çok farklı yüzey açınımı vardır.
4. D. Küpün 12 ayrıtının hepsi aynı uzunluktadır.
5. Y. Kare prizmanın iki tabanı karedir; yüksekliği taban ayrıtından farklıysa dört yan yüzü dikdörtgendir. Bütün yüzleri kare olan prizma küptür.

1. Prizmayı Açalım: Yüzey Açınımı

1. 6 yüz, 12 ayrıt, 8 köşe.
2. 7 cm × 5 cm, 7 cm × 3 cm ve 5 cm × 3 cm ölçülerinde dikdörtgenler; her ölçüden 2 yüz vardır.
3. 2 yüzü kare (tabanlar), 4 yüzü dikdörtgendir.
4. **B.** Karşılıklı yüzler eş olduğu için açınımda her yüzün bir eşi bulunur. Aynı prizmanın birden çok açınımı vardır.

2. Açınımdan Yüzey Alanına

1. $2 \times (9 \times 6 + 9 \times 4 + 6 \times 4) = 2 \times (54 + 36 + 24) = 2 \times 114 = 228$ cm²
2. $6 \times (7 \times 7) = 6 \times 49 = 294$ cm²
3. $2 \times (5 \times 5) + 4 \times (5 \times 12) = 50 + 240 = 290$ cm²
4. **C.** Her yüzden iki tane vardır: $2 \times (12 + 15 + 20) = 2 \times 47 = 94$ cm².

3. Yüzey Alanı Problemleri

1. Taban $12 \times 8 = 96$ cm², ön-arka $2 \times (12 \times 5) = 120$ cm², yanlar $2 \times (8 \times 5) = 80$ cm². Toplam 296 cm².
2. **1. yol:** Üç küp $3 \times 24 = 72$ cm²; birbirine değen 4 yüz $4 \times 4 = 16$ cm² çıkarılır: 56 cm². **2. yol:** Prizma 6 cm, 2 cm, 2 cm: $2 \times (12 + 12 + 4) = 56$ cm².
3. $2 \times (6 \times 3) + 2 \times (4 \times 3) = 36 + 24 = 60$ m²; $60 - 4 = 56$ m².
4. **B.** Küpün yüzey alanı $6 \times 100 = 600$ cm²'dir. $600 - 550 = 50$ cm² karton eksik kalır.

Konu Testi

1. **B.** $2 \times (25 \times 10 + 25 \times 6 + 10 \times 6) = 2 \times (250 + 150 + 60) = 2 \times 460 = 920$ cm².
2. **A.** Bir yüzün alanı $150 \div 6 = 25$ cm²'dir. $5 \times 5 = 25$ olduğundan ayrıt 5 cm'dir.
3. **D.** Tabanlar $2 \times (3 \times 3) = 18$ cm², yan yüzler $4 \times (3 \times 16) = 192$ cm². Toplam 210 cm².
4. **A.** İki açınım da kutunun aynı altı yüzünden oluşur; bu yüzden yüz sayıları ve alanları eşittir. Kutu farklı ayrıtlarından kesildiği için açınımların biçimi farklı olabilir.
5. **C.** Duvarlar $2 \times (6 \times 3) + 2 \times (4 \times 3) = 60$ m², tavan $6 \times 4 = 24$ m². Toplam 84 m²; $84 \div 12 = 7$ kutu.
6. **B.** İki küp $2 \times 96 = 192$ cm²'dir. Çakışan iki yüz $2 \times 16 = 32$ cm² çıkarılır: 160 cm².

Notlarım