Talim Noktası.

7. Sınıf

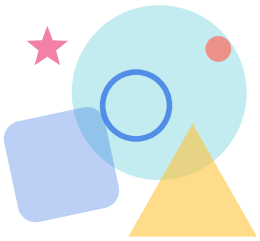
Matematik

8. Tema: İşlemlerle Cebirsel Düşünme ve Değişimler

Sayılarla ilgili ispatlar · Konu Anlatımı

Talim Noktası.
5 · 6 · 7. SINIF DERS KİTAPLARI

Notlarım



8. TEMA



İşlemlerle Cebirsel Düşünme ve Değişimler

Bu temada neler var?

1 Örüntülerden Varsayıma 5
2 Varsayımları Sınamak ve Karşıt Örnek 8
3 Önermeler ve Cebirsel Gösterim 11
4 Cebirsel İspat ve Yeni Durumlara Uyarlama 14
★ Konu Testi 20
★ Cevap Anahtarı 22

Geçen konuda denklem ve eşitsizlik kurdunuz, bulduğunuz değeri problemde yerine koyarak kontrol ettiniz. Tek bir değeri kontrol etmek kolaydır. Peki bir ifadenin sonsuz sayıda sayının hepsi için doğru olduğundan nasıl emin olabilirsiniz? Bütün sayıları tek tek denemek mümkün değildir. Bu konuda sayılardaki örüntüleri inceleyerek varsayımlar kuracak, varsayımlarınızı örneklerle sınayacak ve yanlış olanları karşıt örnekle eleyeceksiniz. Doğru olduğunu düşündüğünüz sonuçları önerme olarak yazacak, geçen konularda kullandığınız cebirsel ifadelerle bu önermeleri bütün sayılar için ispatlayacaksınız.

Bu bölümde

- Sayı örneklerini ve örüntüleri inceleyerek varsayımlarda bulunacaksınız.
- Varsayımınıza uygun sayı örneklerini liste ve tablo hâlinde düzenleyeceksiniz.
- Varsayımları örneklerle sınayacak, yanlış olanları karşıt örnekle göstereceksiniz.
- Ulaştığınız sonucu sözel ve cebirsel bir önerme olarak yazacak, bu önermenin işinize nasıl yarayacağını açıklayacaksınız.
- Tek, çift ve ardışık sayılarla ilgili önermeleri cebirsel olarak ispatlayacak ve ispatı yeni durumlara uyarlayacaksınız.

Anahtar kavramlar

örüntü · varsayım · karşıt örnek · önerme · ispat · cebirsel ispat · tek sayı · çift sayı · ardışık sayılar

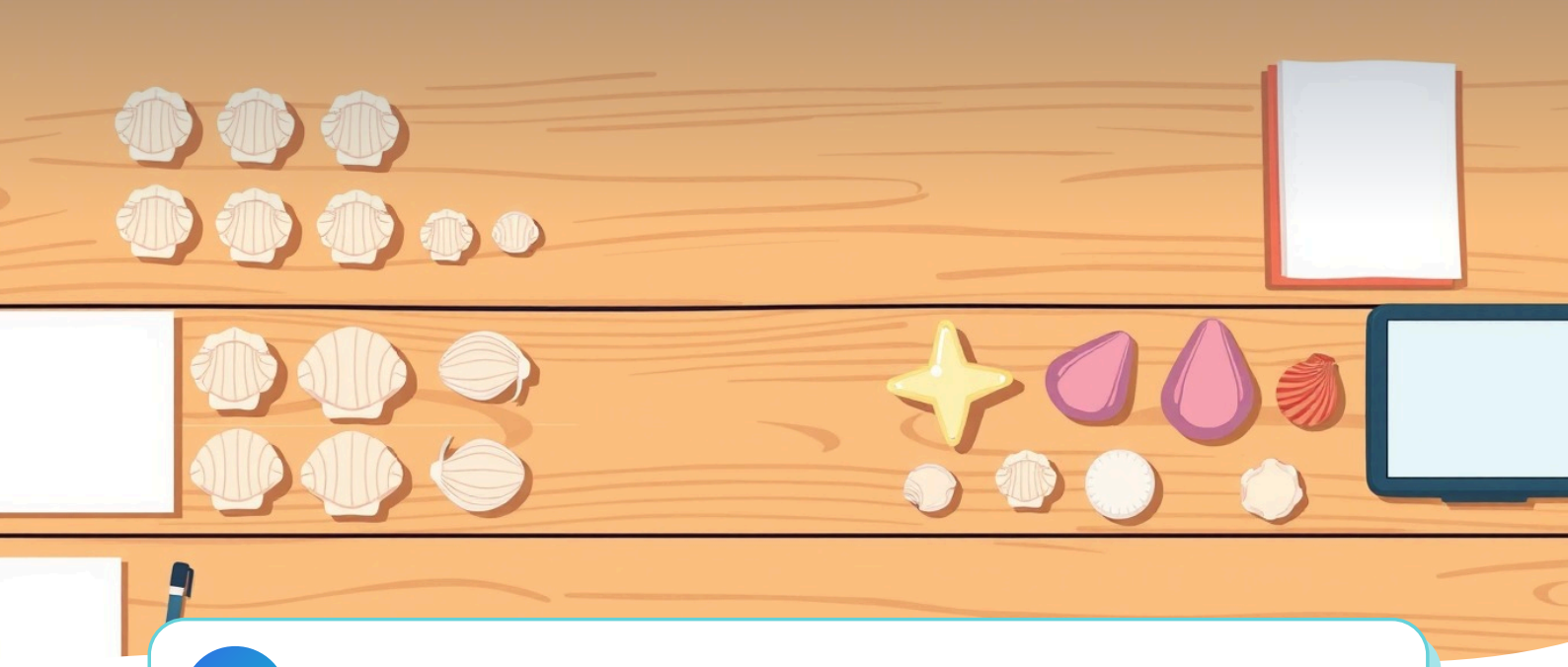
Etkinlik 1

Ön değerlendirme: Ne düşünüyorsunuz?

Doğru ifadelerin yanına **D**, yanlış ifadelerin yanına **Y** yazınız. Yanlış bulduğunuz ifadeyi düzelterek yeniden yazınız.

1. Bir ifade denenen beş örneğin beşinde de doğru çıkıyorsa her sayı için doğrudur.
2. Her çift sayı, bir doğal sayının 2 katı olarak yazılabilir.
3. İki tek sayının toplamı tek sayıdır.
4. “Her” sözcüğüyle başlayan bir ifadenin yanlış olduğunu göstermeye tek bir uygun örnek yeter.
5. Ardışık üç doğal sayının toplamı her zaman 3’ün katıdır.

Zorlandıysanız: Önce 3 + 5 ve 7 + 9 toplamlarını hesaplayıp sonuçların tek mi çift mi olduğuna bakınız. Sonra 4, 5 ve 6 sayılarının toplamını 3’e bölünüz.



1 Örüntülerden Varsayıma

Matematikte birçok keşif, bir düzenin fark edilmesiyle başlar. Birkaç işlem yaptığınızda sonuçların hep aynı özelliği taşıdığını görürsünüz. Örneğin 4 + 5 = 9, 11 + 12 = 23 ve 26 + 27 = 53 toplamlarına bakalım. Toplanan sayılar ardışıktır, yani aralarındaki fark 1'dir. Sonuçların üçü de tek sayıdır. Bu gözlem aklımıza bir tahmin getirir: "İki ardışık doğal sayının toplamı tektir." Henüz bütün sayılar için gösterilmemiş bu tür tahminlere varsayım diyoruz.

Bir varsayım kurduktan sonra ona uygun yeni örnekler aramak gerekir. Örnekleri düzensiz yazmak yerine bir liste ya da tablo hâlinde düzenlemek, örüntüyü görmeyi kolaylaştırır. Aşağıdaki tabloda tek ve çift sayıların toplamlarına ait örnekler türlerine göre gruplanmıştır. Her satırda sonuçların türü aynı kalmaktadır.

Toplanan sayılar	Örnekler	Sonuçların türü
Çift + çift	4 + 6 = 10, 12 + 8 = 20, 30 + 14 = 44	çift
Tek + tek	3 + 5 = 8, 7 + 11 = 18, 21 + 9 = 30	çift
Tek + çift	3 + 4 = 7, 9 + 10 = 19, 15 + 22 = 37	tek

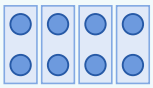
Sayıları noktalarla göstermek de örüntüyü anlamaya yardım eder. Bir sayı kadar noktayı ikişerli sütunlar hâlinde dizdiğinizde çift sayılarda her nokta bir eşle buluşur. Tek sayılarda ise bir nokta açıkta kalır. İki tek sayının noktalarını yan yana getirdiğinizde açıkta kalan iki nokta birbirinin eşi olur. Bu yüzden iki tek sayının toplamında açıkta nokta kalmaz ve toplam çifttir. Nokta dizilimi bir varsayımın neden doğru olabileceğini görmemizi sağlar.

Tanım Örüntü ve varsayım

Sayılarda ya da şekillerde belli bir kurala göre tekrar eden düzene örüntü denir. Örneklere ya da bir örüntüye bakılarak doğru olduğu düşünülen ama bütün durumlar için henüz gösterilmemiş matematik cümlesine varsayım adı verilir.

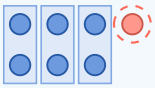
Nokta dizilimiyle tek ve çift sayılar

8: çift sayı



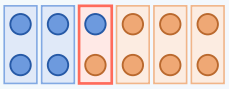
4 eş, açıkta nokta yok

7: tek sayı



3 eş, 1 nokta açıkta

5 + 7 = 12



açıkta kalan iki nokta eş olur

Noktalar ikişerli sütunlara dizilir. Çift sayıda her nokta eşleşir, tek sayıda bir nokta açıkta kalır. İki tek sayı toplanınca açıkta kalan noktalar birbirinin eşi olur ve toplam çift çıkar.

Örnek 1: Karşılıklı sayfalar

Soru: Çağan bir romanı okurken açık duran iki sayfanın numaralarını toplamaktadır. Sol sayfada 24, sağ sayfada 25 yazmaktadır. Daha sonra 56 ile 57 ve 130 ile 131 numaralı sayfaları da toplamıştır.

> a) Çağan'ın bulduğu toplamları hesaplayıp bir varsayım oluşturunuz.
> b) Varsayımınızı sınamak için ilk sayısı tek olanlar da bulunan en az üç yeni örneği liste hâlinde yazınız.
> c) Örneklerin varsayımı karşılayıp karşılamadığını nokta dizilimiyle açıklayınız.

Çözüm:

> a) Toplamlar 24 + 25 = 49, 56 + 57 = 113 ve 130 + 131 = 261 olur. Sonuçların hepsi tektir. Varsayım şöyle yazılabilir: "İki ardışık doğal sayının toplamı tektir."
> b) Kitapta sol sayfa hep çift numaralıdır. Varsayım bütün ardışık sayılar için kurulduğundan ilk sayısı tek olan örnekler de denenmelidir: 7 + 8 = 15, 19 + 20 = 39, 99 + 100 = 199. Listedeki bütün sonuçlar yine tektir.
> c) Ardışık iki sayıdan biri çift, diğeri tektir. Çift sayının bütün noktaları eşleşir, tek sayının ise bir noktası açıkta kalır. Toplamda yalnız bir nokta açıkta kaldığı için sonuç tektir. Örnekler varsayımı destekler. Bu sonucun her sayı için doğru olduğunu 4. bölümde cebirsel olarak göstereceksiniz.

Notlarım

Ne öğrendik?

1. Ardışık üç tek sayının toplamına ait dört örnek yazınız. Örneğin 5 + 7 + 9 toplamıyla başlayabilirsiniz. Toplamlarla ilgili bir varsayım oluşturunuz.

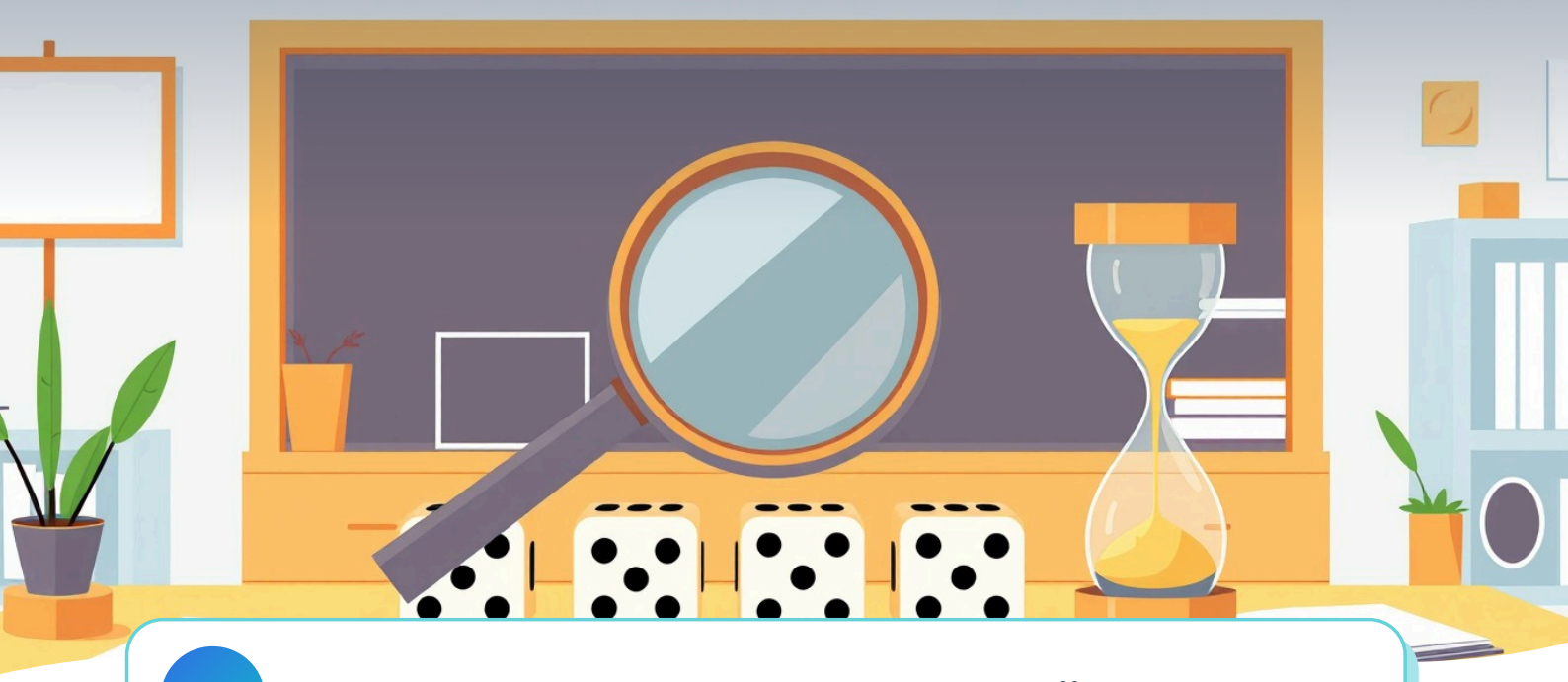
2. Verilen 9 ve 14 sayılarını ikişerli sütunlar hâlinde noktalarla gösteriniz. Hangisinde açıkta nokta kalır? Bu sayıların toplamı tek midir, çift midir?

3. Beşin katı olan iki sayının toplamına ait üç örnek yazınız ve bir varsayım oluşturunuz.

4. "İki çift sayının toplamı çifttir." varsayımını sınamak için hazırlanan listelerden hangisi uygundur?

A) 3 + 5, 7 + 9, 11 + 13
B) 2 + 3, 4 + 5, 6 + 7
C) 6 + 8, 14 + 20, 32 + 18
D) 1 + 2, 3 + 4, 5 + 6

Notlarım



2 Varsayımları Sınamak ve Karşıt Örnek

Bir varsayıma uyan örnekler bulmak heyecan vericidir ama bu örnekler varsayımın doğru olduğunu kanıtlamaz. Örneklerin sayısı ne kadar artarsa artsın, denenmemiş bir sayı her zaman kalır. Şekildeki örüntü bu durumu çok iyi gösterir. Bir doğal sayının karesine sayının kendisini ve 41'i eklediğimizde 0'dan 39'a kadar kırk sayının hepsinde sonuç asal sayıdır. Ancak 40 için sonuç 1.681 olur ve $1.681 = 41 \cdot 41$ olduğundan asal değildir. Kırk örnek doğru çıktığı hâlde varsayım yanlıştır.

Bir varsayımın yanlış olduğunu göstermek ise çok daha kısa sürer. Örneğin bir öğrenci "İki tek sayının toplamı tektir." diye düşünsün. Bu varsayımı çürütmek için $3 + 5 = 8$ örneği yeterlidir. Böyle bir örnek bulunduğunda varsayım ya bırakılır ya da düzeltilir. Doğru biçimi "İki tek sayının toplamı çifttir." olur.

Varsayımlarda kullanılan sözcükler önemlidir. "Her" ya da "her zaman" sözcüğüyle kurulan bir varsayım tek bir uygun olmayan örnekle çürür. "En az bir" ile kurulan bir ifadenin doğru olduğunu göstermek için ise uygun tek bir örnek bulmak yeter. Örneğin "Beşin katı olan en az bir asal sayı vardır." ifadesi 5 sayısıyla doğrulanır. Bir varsayımı sınadıktan sonra onu üç gruptan birine yerleştirebilirsiniz: her zaman doğru, bazen doğru ya da hiçbir zaman doğru değil.

İfade	Sınama	Sonuç
İki tek sayının toplamı tektir.	$3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$	Hiçbir zaman doğru değil (4. bölümde ispatlanacak)
Bir sayının 2 katı o sayıdan büyüktür.	$4 \cdot 2 = 8$ ama $0 \cdot 2 = 0$	Bazen doğru
Ardışık iki sayının toplamı tektir.	$7 + 8 = 15$, $30 + 31 = 61$	Her zaman doğru (4. bölümde ispatlanacak)

Tanım Karşıt örnek

Bir varsayımın koşullarını sağladığı hâlde varsayımın öne sürdüğü sonucu sağlamayan örneğe karşıt örnek denir. “Her” ya da “her zaman” sözcüğüyle kurulan bir varsayımı çürütmeye tek bir karşıt örnek yeter.

Uzun süre doğru görünen bir varsayım

n	0	1	2	3	10	20	39	40
$n \cdot n + n + 41$	41	43	47	53	151	461	1.601	1.681
asal mı?	evet	evet	evet	evet	evet	evet	evet	hayır

0’dan 39’a kadar kırk sayının hepsinde sonuç asal

$1.681 = 41 \cdot 41$
karşıt örnek

Tabloda yalnız bazı n değerleri gösterilmiştir. Kırk örnek varsayımı destekler ama n = 40 için sonuç asal değildir. Örnekler ne kadar çok olursa olsun ispat yerine geçmez.

Örnek 2: Panodaki varsayımlar

Soru: Berra matematik kulübünün panosuna sayılarla ilgili üç varsayım asmıştır.

- I. Dördün katı olan her sayı 2’nin de katıdır.
- II. Bir sayının 3 katı her zaman tek sayıdır.
- III. İki asal sayının toplamı her zaman çift sayıdır.

a) Her varsayımı en az iki örnekle sınayınız.
b) Varsayımları “her zaman doğru”, “bazen doğru” ya da “hiçbir zaman doğru değil” diye sınıflandırınız. Yanlış olanlar için karşıt örnek veriniz.
c) Yanlış olan varsayımları her zaman doğru olacak biçimde düzeltiniz.

Çözüm:

a) Birinci varsayım için $12 = 2 \cdot 6$ ve $20 = 2 \cdot 10$ bulunur. İkinci varsayım için $3 \cdot 5 = 15$ tektir ama $3 \cdot 4 = 12$ çifttir. Üçüncü varsayım için $3 + 5 = 8$ ve $7 + 11 = 18$ çifttir ama $2 + 3 = 5$ tektir.
b) Birinci varsayım her zaman doğrudur. Dördün katı olan bir sayı $4k$ biçimindedir ve $4k = 2 \cdot 2k$ olduğundan 2’nin de katıdır. İkinci varsayım bazen doğrudur, $3 \cdot 4 = 12$ bir karşıt örnektir. Üçüncü varsayım da bazen doğrudur, $2 + 3 = 5$ bir karşıt örnektir.
c) İkinci varsayım “Bir tek sayının 3 katı her zaman tektir.” biçiminde düzeltilebilir. Üçüncü varsayımdaki sorun 2 sayısıdır, çünkü 2 çift olan tek asal sayıdır. Düzeltilmiş hâli şöyledir: “İkiden büyük iki asal sayının toplamı her zaman çifttir.”

Ne öğrendik?

1. Aşağıdaki varsayımların her biri için bir karşıt örnek veriniz. a) Her tek sayı asaldır. b) İki sayının farkı, bu iki sayının ikisinden de küçüktür. c) Bir doğal sayının yarısı her zaman bir doğal sayıdır.

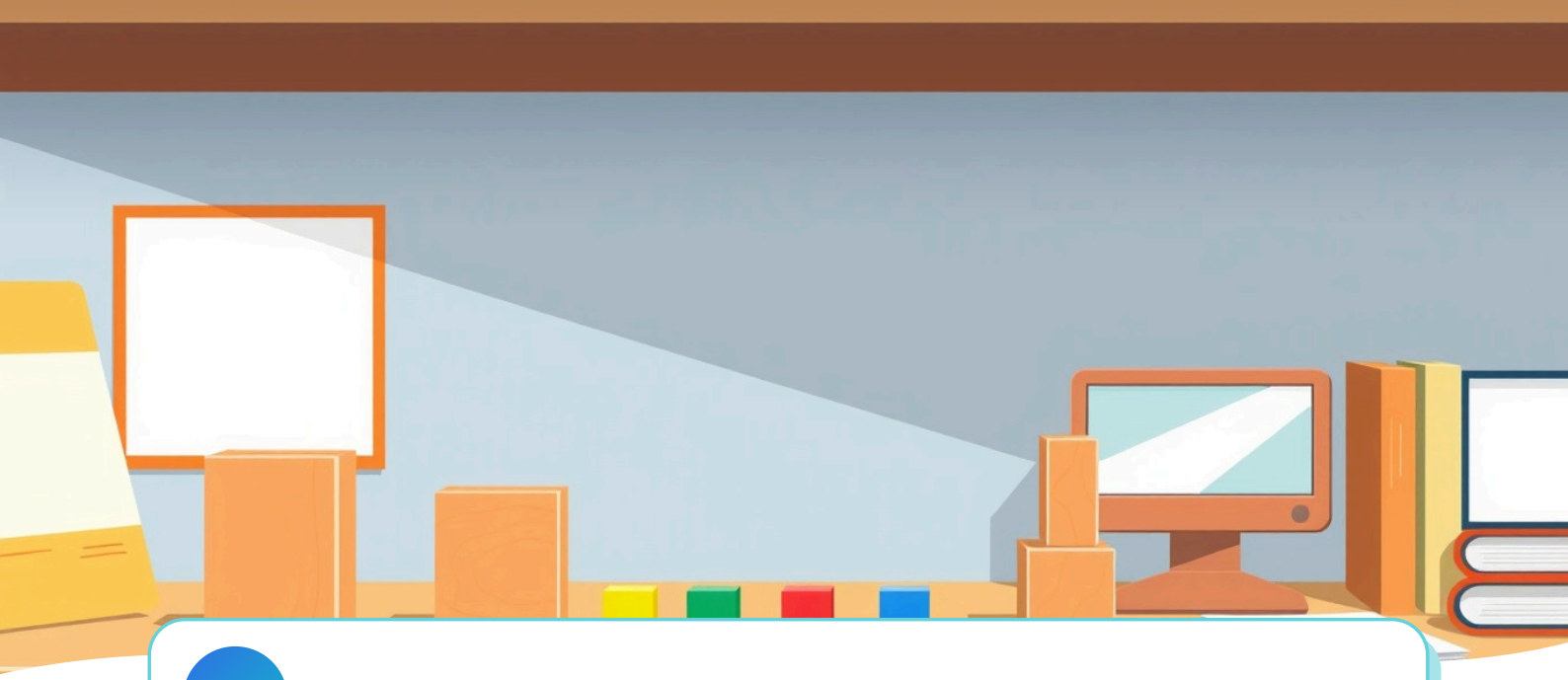
2. Verilen "Beşin katı olan en az bir asal sayı vardır." ifadesinin doğru olduğunu gösteriniz. Bunun için kaç örnek gerektiğini açıklayınız.

3. Aşağıdaki ifadeleri "her zaman doğru", "bazen doğru" ya da "hiçbir zaman doğru değil" diye sınıflandırınız. a) Ardışık iki doğal sayıdan biri çifttir. b) Bir sayının yarısı o sayıdan küçüktür. c) İki çift sayının toplamı tektir.

4. "Her asal sayı tektir." varsayımı için karşıt örnek olan sayı hangisidir?

A) 9
B) 2
C) 15
D) 3

Notlarım



3 Önermeler ve Cebirsel Gösterim

Bir varsayım sınandıktan ve doğru olduğu düşünüldükten sonra açık ve kesin bir cümleyle yazılır. Bu cümlede “bazen”, “genellikle” ya da “çoğu zaman” gibi belirsiz sözcükler kullanılmaz. Onların yerine “her”, “hiçbir” ve “en az bir” gibi sınırı belli sözcükler seçilir. Böyle yazılan bir cümlenin doğru ya da yanlış olduğu kesin olarak söylenebilir. Bu tür cümlelere önerme denir. Bir önerme yanlış da olabilir. Örneğin “Her çift sayı 4’e bölünür.” bir önermedir ama 6 sayısı yüzünden yanlıştır.

Bir önermeyi bütün sayılar için ispatlamak istiyorsak önce onu cebirsel olarak yazmalıyız. Bunun için sayıların ortak özelliğini bir harfle gösteririz. Çift sayılar 2’nin katı olduğundan k bir doğal sayı olmak üzere 2k biçiminde yazılır. Tek sayılar bir çift sayıdan 1 fazladır ve 2k + 1 biçiminde gösterilir. Ardışık üç sayının en küçüğü n ise diğerleri n + 1 ve n + 2 olur. Benzer şekilde 3’ün katı olan bir sayı 3k, 5’in katı olan bir sayı 5k biçiminde yazılır.

Farklı sayılar için farklı harfler kullanılmalıdır. İki tek sayıyı 2k + 1 ve 2k + 1 diye yazarsanız iki sayıyı birbirine eşit kabul etmiş olursunuz. Bu yüzden iki tek sayı için 2k + 1 ve 2m + 1 yazılır. Burada k ile m aynı ya da farklı doğal sayılar olabilir.

Önermeler yalnız merak için ispatlanmaz, günlük hesaplarda da işe yarar. İşlem hızını artırır, büyük sayılarla çalışmayı kolaylaştırır ve sonuçları kontrol etmeye yardım eder. Örneğin 98 + 99 + 100 toplamını ortadaki sayının 3 katı olarak $3 \cdot 99 = 297$ biçiminde hızlıca bulabilirsiniz. İki tek sayının toplamının çift olduğunu bilen biri, 2.473 + 1.869 işleminin sonucunu 4.341 yazan bir arkadaşına hemen hata yaptığını söyleyebilir.

Tanım Önerme ve ispat

Doğru ya da yanlış olduğu kesin olarak söylenebilen matematik cümlesine önerme denir. Bir önermenin, koşullarını sağlayan bütün sayılar için doğru olduğunu matematiksel gerekçelerle adım adım göstermeye ispat adı verilir.

Tek, çift ve ardışık sayıların cebirsel gösterimi

çift sayı



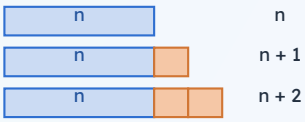
2k

tek sayı



2k + 1

ardışık üç sayı



her biri bir öncekinden 1 fazla

Burada k, m ve n birer doğal sayıdır. Farklı sayılar için 2k + 1 ve 2m + 1 gibi farklı harfler kullanılır.

Örnek 3: Hesap makinesindeki hata

Soru: Eymen bir hesap makinesiyle 1.357 + 2.469 işlemini yapmış ve sonucu 3.825 olarak not etmiştir.

> a) Eymen'in sonucu yeniden toplama yapmadan kontrol etmesini sağlayan önermeyi sözel olarak yazınız.
> b) Bu önermeyi tek sayıların cebirsel gösterimiyle ifade ediniz.
> c) Önermenin bu hesapta nasıl bir katkı sağladığını açıklayınız.

Çözüm:

> a) Toplanan sayıların ikisi de tektir. Kullanılacak önerme şudur: "Toplanan iki sayı da tekse sonuç daima çifttir."
> b) Önerme cebirsel olarak şöyle yazılır: Hangi k ve m doğal sayıları seçilirse seçilsin, 2k + 1 ile 2m + 1 sayılarının toplamı bir çift sayıdır.
> c) Sonuç çift olmalıdır. Not edilen 3.825 tek olduğu için hesapta bir hata vardır. Doğru sonuç 1.357 + 2.469 = 3.826'dır. Önerme, toplamayı baştan yapmadan hatanın fark edilmesini sağlamıştır.

Ne öğrendik?

1 Aşağıdaki sayıları cebirsel olarak gösteriniz. a) Yedinin katı olan bir sayı b) En küçüğü 2k olan ardışık üç çift sayı c) Verilen 2k + 1 tek sayısından hemen sonra gelen tek sayı

2 Aşağıdaki cümlelerden hangilerinin önerme olduğunu belirleyiniz. Önerme olanların doğru mu yanlış mı olduğunu yazınız. a) Tek sayılar bazen ilginçtir. b) Her çift sayı 4'e bölünür. c) İki çift sayının toplamı çifttir.

3 "Ardışık üç sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır." önermesini kullanarak 49 + 50 + 51 toplamını hızlıca bulunuz. Önermenin size nasıl kolaylık sağladığını açıklayınız.

4 Bir tek sayı 2k + 1 ile gösterildiğine göre bu sayıdan hemen sonra gelen tek sayı hangisidir?

A) 2k + 2
B) 3k + 1
C) 4k + 2
D) 2k + 3

Notlarım



4 Cebirsel İspat ve Yeni Durumlara Uyarlama

Bir önermeyi ispatlamak, onun koşullarını sağlayan her sayı için doğru olduğunu göstermektir. Cebirsel ispatta sayılar harflerle gösterilir ve harfler üzerinde işlem yapılır. Harf yerine hangi doğal sayı yazılırsa yazılsın yapılan işlemler aynı kaldığı için sonuç da her sayı için geçerli olur. Cebirsel ispatta genellikle şu adımlar izlenir:

- Önermede adı geçen sayıları harflerle gösterin.
- İstenen işlemi cebirsel ifadelerle yapın ve benzer terimleri toplayın.
- Sonucu istenen biçime getirin. Örneğin çift olduğunu göstermek için $2 \cdot (\ldots)$, 3'ün katı olduğunu göstermek için $3 \cdot (\ldots)$ biçiminde yazın.
- Parantezin içindeki ifadenin bir doğal sayı olduğunu belirterek sonucu yorumlayın.

Bu adımlarla "İki tek sayının toplamı çifttir." önermesini ispatlayalım. İki tek sayı $2k + 1$ ve $2m + 1$ olsun. Burada k ve m birer doğal sayıdır. Toplamları $(2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 2$ olur. Her terimde 2 çarpanı bulunduğundan toplam $2(k + m + 1)$ biçiminde yazılır. Burada $k + m + 1$ bir doğal sayıdır. Bir doğal sayının 2 katı çift olduğu için iki tek sayının toplamı her zaman çifttir.

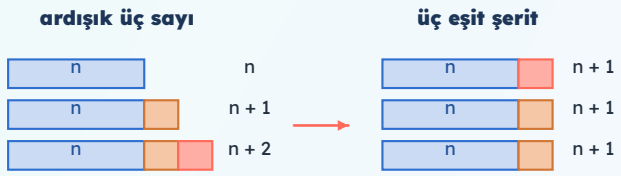
Şimdi ardışık üç sayıyı ele alalım. En küçük sayı n olsun. Toplam $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$ olur. Bu sonuç iki şey söyler: Toplam her zaman 3'ün katıdır ve toplam ortadaki sayı olan $n + 1$'in 3 katına eşittir. Şekilde aynı ispat şeritlerle de gösterilmiştir. En uzun şeritten bir birim alınıp en kısa şeride eklendiğinde üç eşit şerit oluşur.

İspatlanan bir önerme yeni sorular sordurur. Ardışık üç sayı için doğru olan, ardışık dört sayı için de doğru mudur? Toplam $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$ olur. Bu ifade 4'ün katı değildir. Gerçekten $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ bir karşıt örnektir. Ancak $4n + 6 = 2(2n + 3)$ olduğundan ardışık dört sayının toplamı her zaman çifttir. Bir önermeyi yeni bir duruma uyarlarken önce cebirsel ifadeyi yazmak, hangi sonucun korunduğunu ve hangisinin değiştiğini açıkça gösterir.

Tanım Cebirsel ispat

Bir önermedeki sayıları harflerle gösterip cebirsel ifadelerle işlem yaparak önermenin koşullarını sağlayan her sayı için doğru olduğunu göstermeye cebirsel ispat denir. Cebirsel ispat, birkaç örnekle sınamaktan farklı olarak bütün sayıları aynı anda kapsar.

Ardışık üç sayının toplamının ispatı



En uzun şeritten bir birim en kısa şeride taşınır.

Mavi şerit n uzunluğunu, her kare 1 birimi gösterir. Taşımadan sonra her şerit ortadaki sayıya eşit olur.

Cebirsel ispat

$n + (n + 1) + (n + 2)$

$= 3n + 3$

$\mathbf{= 3(n + 1)}$

Toplam 3'ün katıdır ve ortadaki sayının 3 katına eşittir.

Örnek: $14 + 15 + 16 = 3 \cdot 15 = 45$

Örnek 4: Rakamları yer değiştiren sayılar

Soru: Zümra rakamları sıfırdan farklı iki basamaklı bir sayı seçip rakamlarının yerini değiştirmekte ve iki sayıyı toplamaktadır. Seçtiği sayılar 36, 52 ve 47'dir.

> a) Zümra'nın bulduğu toplamları hesaplayıp bir varsayım oluşturunuz.
> b) Onlar basamağındaki rakamı a, birler basamağındaki rakamı b ile göstererek varsayımınızı cebirsel olarak ispatlayınız.
> c) İspatı, iki sayının farkını inceleyecek biçimde yeni bir duruma uyarlayınız.

Çözüm:

> a) Toplamlar $36 + 63 = 99$, $52 + 25 = 77$ ve $47 + 74 = 121$ olur. Sonuçlar $11 \cdot 9$, $11 \cdot 7$ ve $11 \cdot 11$ biçiminde yazılır. Varsayım: "İki basamaklı bir sayı ile rakamlarının yeri değiştirilerek elde edilen sayının toplamı 11'in katıdır."
> b) Sayı $10a + b$, rakamlarının yeri değiştirilmiş sayı $10b + a$ olur. Toplam $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$ bulunur. Parantezin içi bir doğal sayı olduğundan toplam her zaman 11'in katıdır. Üstelik bu toplam, rakamlar toplamının 11 katıdır. Örneğin $47 + 74 = 11 \cdot (4 + 7) = 121$.
> c) Rakam a, rakam b'den büyük olsun ve büyük sayıdan küçük sayıyı çıkaralım: $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. Fark her zaman 9'un katıdır. Örneğin $63 - 36 = 27 = 9 \cdot 3$ olur.

Ne öğrendik?

1. “Beşin katı olan iki sayının toplamı da 5’in katıdır.” önermesini cebirsel olarak ispatlayınız.

2. Yarım bırakılan ispatı tamamlayınız. Önerme: “Ardışık üç çift sayının toplamı 6’nın katıdır.”
İspat: Sayılar 2k, 2k + 2 ve 2k + 4 olsun. Toplam 2k + (2k + 2) + (2k + 4) = … = 6(…) olur.

3. Ardışık dört sayının toplamı 4’ün katı mıdır? Cebirsel ifadeyi yazarak inceleyiniz ve bir karşıt örnek veriniz.

4. “Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı tektir.” önermesinin bütün sayılar için geçerli ispatı hangisidir?
   A) (2k + 1) + 2m = 2(k + m) + 1
   B) (2k + 1) + 2k = 4k + 1
   C) 3 + 4 = 7 olduğu için toplam tektir.
   D) (2k + 1) + 2m = 2(k + m + 1)

Notlarım

ÖKLİD'İN ELEMANLAR'I



Yaklaşık 2.300 yıl önce İskenderiye'de yaşayan Öklid, Elemanlar adlı on üç kitaplık eserinde matematiği tanımlardan ve temel kabullerden başlayarak kurdu. Eserde her önerme, daha önce ispatlanmış önermelere dayanarak gösterilir. Öklid bu eserde asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu da ispatlamıştır. Kitap yüzyıllar boyunca ispatın nasıl yazılacağını öğreten bir örnek olarak okundu.

GOLDBACH VARSAYIMI



Christian Goldbach 1742'de Leonhard Euler'e yazdığı bir mektupta sayılarla ilgili bir varsayım paylaştı. Bu varsayım bugün şöyle anlatılır: İkiden büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır. Örneğin $10 = 3 + 7$ ve $28 = 11 + 17$ olur. Varsayım bilgisayarlarla çok büyük sayılara kadar denenmiş ve hiç karşıt örnek bulunamamıştır. Yine de bütün çift sayılar için ispatlanamadığından hâlâ bir varsayım olarak anılır.

ÇAKIL TAŞLARIYLA SAYILAR



Antik Yunan'da Pisagorcular sayıları çakıl taşlarıyla dizerek incelerdi. Kare biçiminde dizilebilen 1, 4, 9 ve 16 gibi sayılara kare sayılar dediler. Bir kareye köşeden L biçiminde bir tek sayı kadar taş eklenince bir sonraki kare oluşur: $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$. Böylece 1'den başlayan ardışık tek sayıların toplamının bir kare sayı olduğu taşlarla görülür.

Bağlantı: Fen Bilimleri

Fen Bilimleri dersinde bir hipotezi deney ve gözlemle sınarsınız. Deney sonuçları hipotezi destekleyebilir. Beklenmeyen bir sonuç ise hipotezin gözden geçirilmesini gerektirir. Bu durum matematikteki karşıt örneğe benzer. Örneğin "Su 100 °C'de kaynar." gözlemi deniz seviyesinde doğrudur ama yüksek bir dağda su daha düşük bir sıcaklıkta kaynar. Fen bilimlerinde bir sonuç yeni gözlemlerle değişebilir. Matematikte ise cebirsel olarak ispatlanan bir önerme, koşullarını sağlayan bütün sayılar için kesin olarak doğrudur.



Etkinlik 2

Performans görevi: Sayı gizemleri sergisi

Grup arkadaşlarınızla sayılarla ilgili bir "sayı gizemi" seçip sınıfınızda sergileyiniz.

1. Ardışık sayılar, tek ve çift sayılar, katlar ya da rakamları yer değiştiren sayılardan bir konu seçiniz.
2. En az sekiz örneği bir tabloya yazıp bir varsayım oluşturunuz.



3. Karşıt örnek arayınız. Bulursanız varsayımınızı düzeltiniz.
4. Sonucu sözel ve cebirsel bir önerme olarak yazıp ispatlayınız. İspatı nokta dizilimi ya da şerit modeliyle destekleyiniz.
5. Sunumda önermenizin hızlı hesapta nasıl işe yaradığını bir örnekle gösteriniz ve başka bir gruptan önermeyi yeni bir duruma uyarlamasını isteyiniz.

★ PUANLAMA ANAHTARI

Ölçüt	Tam (3)	Kısmen (2)	Henüz değil (1)
Örnek ve varsayım	Örnekler düzenli bir tabloda, varsayım örneklere uygun	Örnekler az ya da varsayım kısmen uygun	Örnek ya da varsayım eksik
Sınama ve karşıt örnek	Karşıt örnek aranmış, gerekiyorsa varsayım düzeltilmiş	Sınama yapılmış ama düzeltme eksik	Varsayım sınanmamış
Önerme ve ispat	Önerme açık, cebirsel ispat doğru ve eksiksiz	İspatta bir adım eksik ya da hatalı	İspat yapılmamış
Sunum ve uyarlama	Katkı örneklenmiş, yeni duruma uyarlama tartışılmış	Katkı ya da uyarlama eksik	Sunum yapılmamış

✓ Ne öğrendik?

1. “İki ardışık doğal sayının toplamı tektir.” önermesini cebirsel olarak ispatlayınız.

2. Bir öğrenci “Bir sayının 5 katına 1 eklenirse sonuç her zaman tektir.” demektedir. Bu varsayımı sınayınız, yanlışsa bir karşıt örnek verip doğru olacak biçimde düzeltiniz ve düzeltilmiş hâlini ispatlayınız.

3 Aklınızdan bir sayı tutunuz. Bu sayıya 7 ekleyip sonucu 3 ile çarpınız, çıkan sonuçtan 21 çıkarıp elde ettiğiniz sayıyı 3'e bölünüz. Hangi sayıyı tutarsanız tutun başladığınız sayıya ulaştığınızı cebirsel olarak gösteriniz.

4 Ardışık üç doğal sayının toplamı 252'dir. Buna göre ortadaki sayı kaçtır?

A) 83 B) 126
C) 85 D) 84

Tuzağa düşme!

Yanılgı avı: Varsayımlar ve ispatlar

- ✗ "Bir ifade on örnekte doğru çıktıysa ispatlanmış olur." → ✓ Örnekler bir varsayımı destekler ama ispat değildir. Bütün sayılar için cebirsel ispat gerekir.
- ✗ "Bir varsayımı çürütmek için birkaç karşıt örnek gerekir." → ✓ "Her" sözcüğüyle kurulan bir varsayımı çürütmeye tek bir karşıt örnek yeter.
- ✗ "İki tek sayı 2k + 1 ve 2k + 1 diye gösterilir." → ✓ Aynı harf aynı sayıyı gösterir. Farklı sayılar için 2k + 1 ve 2m + 1 gibi farklı harfler kullanılır.
- ✗ "Bazı sayılarda yanlış çıkan bir ifade hiçbir zaman doğru değildir." → ✓ Bazı sayılarda doğru, bazılarında yanlış olan bir ifade "bazen doğru" grubundadır.
- ✗ "Toplamın 2(k + m + 1) olduğunu bulduktan sonra çift olduğunu görmek için k ve m yerine sayı yazmak gerekir." → ✓ Parantezin içi bir doğal sayıdır ve bir doğal sayının 2 katı her zaman çifttir.

Notlarım

Konu Testi

✓ Ne öğrendik?

Aşağıdaki soruları dikkatle okuyunuz. Her sorunun doğru seçeneğini işaretleyiniz.

1 Bir öğrenci $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$ ve $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ toplamlarını hesaplamıştır. Bu örneklere dayanarak kurulabilecek en uygun varsayım hangisidir?

A) Ardışık tek sayıların toplamı her zaman tektir.
B) Birden başlayan ardışık tek sayıların toplamı bir kare sayıdır.
C) Ardışık tek sayıların toplamı her zaman 3'ün katıdır.
D) Tek sayıların toplamı her zaman 4'ün katıdır.

2 "Rakamları toplamı çift olan her sayı çifttir." varsayımı için karşıt örnek olan sayı hangisidir?

A) 24
B) 46
C) 35
D) 27

3 Aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğrudur?

A) İki asal sayının toplamı çifttir.
B) Bir tek sayının 3 katı çifttir.
C) Ardışık iki sayının toplamı çifttir.
D) İki çift sayının farkı çifttir.

4 Ardışık üç doğal sayının en küçüğü n ile gösterilmiştir. Bu sayıların toplamını doğru gösteren ve toplamın 3'ün katı olduğunu açıklayan ifade hangisidir?

A) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$
B) $n + n + n = 3n$
C) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 2$
D) $n + 2n + 3n = 6n$

5 Aşağıda "Bir tek sayı ile bir çift sayının toplamı tektir." önermesinin ispatı verilmiştir. İspat: Tek sayı $2k + 1$, çift sayı $2m$ olsun (k ve m doğal sayı). Buna göre $(2k + 1) + 2m = 2k + 2m + 1 =$ ____ $+ 1$. Boş bırakılan yere aşağıdakilerden hangisi yazılmalıdır?

A) $2(k + m + 1)$
B) $2(k + m)$
C) $4km$
D) $2k + m$

6 Bir öğrenci ardışık üç sayının toplamını dört farklı işlemde hesaplamıştır. Hangi işlemde, toplamayı yeniden yapmadan hata yapıldığı söylenebilir?

A) $17 + 18 + 19 = 54$
B) $32 + 33 + 34 = 99$
C) $105 + 106 + 107 = 318$
D) $60 + 61 + 62 = 182$

KENDİME NOT

Bu konuda	Evet	Kısmen	Henüz değil
Sayı örneklerinden ve örüntülerden bir varsayım oluşturabiliyorum.			
Bir varsayımı örneklerle sınayıp gerekirse karşıt örnek verebiliyorum.			
Tek, çift ve ardışık sayıları cebirsel olarak gösterebiliyorum.			
Bir önermeyi sözel ve cebirsel olarak yazıp katkısını açıklayabiliyorum.			
Sayılarla ilgili önermeleri cebirsel olarak ispatlayıp yeni durumlara uyarlayabiliyorum.			

Notlarım

Cevap Anahtarı

1. Örüntülerden Varsayıma

1. Örnekler: 5 + 7 + 9 = 21, 1 + 3 + 5 = 9, 11 + 13 + 15 = 39, 21 + 23 + 25 = 69. Toplamların hepsi 3'ün katıdır ve tektir. Varsayım: "Ardışık üç tek sayının toplamı 3'ün katıdır."
2. Dokuz noktada bir nokta açıkta kalır, on dört noktanın hepsi eşleşir. Toplam 9 + 14 = 23 olur ve tektir, çünkü açıkta yalnız bir nokta vardır.
3. Örnekler: 10 + 15 = 25, 20 + 35 = 55, 45 + 5 = 50. Varsayım: "Beşin katı olan iki sayının toplamı da 5'in katıdır."
4. **C.** Bu listedeki bütün sayılar çifttir. Seçenek A'da yalnız tek sayılar, B ve D'de ise birer tek ve çift sayı toplanmıştır.

2. Varsayımları Sınamak ve Karşıt Örnek

1. a) 9 tektir ama 3 · 3 olduğundan asal değildir. b) 7 – 2 = 5 olur ve 5, 2'den büyüktür. c) Yedinin yarısı 3,5'tir ve doğal sayı değildir.
2. Beş sayısı hem 5'in katıdır hem de asaldır. "En az bir" ile kurulan ifadeyi doğrulamak için uygun tek bir örnek yeterlidir.
3. a) Her zaman doğru: Ardışık iki sayının biri tek, diğeri çifttir. b) Bazen doğru: Sıfırın yarısı yine 0'dır. c) Hiçbir zaman doğru değil: İki çift sayının toplamı her zaman çifttir.
4. **B.** İki sayısı asaldır ama tek değildir. Dokuz ve 15 asal olmadığı için varsayımın koşulunu sağlamaz, 3 ise varsayıma uyar.

3. Önermeler ve Cebirsel Gösterim

1. a) 7k b) 2k, 2k + 2 ve 2k + 4 c) 2k + 3
2. a) Önerme değildir, çünkü "ilginç" kişiden kişiye değişir ve "bazen" sözcüğü belirsizdir. b) Önermedir ve yanlıştır, 6 sayısı bir karşıt örnektir. c) Önermedir ve doğrudur.
3. Ortadaki sayı 50'dir ve toplam 3 · 50 = 150 olur. Üç sayıyı ayrı ayrı toplamak yerine tek bir çarpma yapılır.
4. **D.** Ardışık tek sayılar arasındaki fark 2'dir: 2k + 1 + 2 = 2k + 3. Seçenek A'daki 2k + 2 çift bir sayıdır.

4. Cebirsel İspat ve Yeni Durumlara Uyarlama

1. Beşin katı olan iki sayı 5k ve 5m olsun. Burada k ve m birer doğal sayıdır. Toplam 5k + 5m = 5(k + m) olur. Parantezin içi bir doğal sayı olduğundan toplam 5'in katıdır.
2. Toplam 6k + 6 = 6(k + 1) olur. Parantezin içi bir doğal sayı olduğu için toplam 6'nın katıdır.

3. Toplam $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$ olur ve 4'ün katı değildir. Karşıt örnek: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Toplam yine de her zaman çifttir, çünkü $4n + 6 = 2(2n + 3)$.
4. **A.** Farklı sayılar için farklı harfler kullanılmış ve toplam bir çift sayının 1 fazlası olarak yazılmıştır. Seçenek B'de iki sayı için aynı harf kullanıldığından yalnız bazı sayılar incelenmiştir. Seçenek C yalnız bir örnektir. Seçenek D'de işlem hatası vardır.

4. Cebirsel İspat ve Yeni Durumlara Uyarlama

1. Sayılar n ve n + 1 olsun. Toplam $n + (n + 1) = 2n + 1$ olur. Bu ifade bir çift sayının 1 fazlası olduğu için toplam her zaman tektir.
2. Sayı 1 seçilirse $5 \cdot 1 + 1 = 6$ olur ve 6 çifttir. Bu bir karşıt örnektir. Düzeltilmiş önerme: "Bir çift sayının 5 katına 1 eklenirse sonuç tektir." Çift sayı 2k olsun. Sonuç $5 \cdot 2k + 1 = 10k + 1 = 2 \cdot 5k + 1$ olur ve tektir.
3. Tutulan sayı x olsun. İşlemler sırasıyla $x + 7$, $3(x + 7) = 3x + 21$, $3x + 21 - 21 = 3x$ ve $3x \div 3 = x$ olur. Sonuç her zaman tutulan sayıdır.
4. **D.** Ardışık üç sayının toplamı ortadaki sayının 3 katıdır. Ortadaki sayı $252 \div 3 = 84$ olur. Kontrol: $83 + 84 + 85 = 252$.

Konu Testi

1. **B.** Toplamlar 4, 9 ve 16 olup sırasıyla $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$ ve $4 \cdot 4$ biçiminde yazılır. Seçenek A, C ve D'yi 4 ya da 9 toplamı çürütür.
2. **C.** Otuz beşin rakamları toplamı $3 + 5 = 8$ çifttir ama 35 tektir. Yirmi dört ve 46 varsayıma uyar, 27'nin rakamları toplamı 9 tek olduğu için koşulu sağlamaz.
3. **D.** Çift sayılar 2k ve 2m ise farkları $2(k - m)$ olur ve çifttir. Seçenek A'yı $2 + 3 = 5$, B'yi $3 \cdot 3 = 9$, C'yi $4 + 5 = 9$ çürütür.
4. **A.** Toplam $3n + 3 = 3(n + 1)$ olur. Seçenek B ve D'de sayılar ardışık yazılmamış, C'de ise $1 + 2 = 3$ yerine 2 yazılmıştır.
5. **B.** Benzer terimlerde 2 ortak çarpandır: $2k + 2m = 2(k + m)$. Toplam bir çift sayının 1 fazlası olduğundan tektir.
6. **D.** Ardışık üç sayının toplamı 3'ün katıdır. Yüz seksen iki 3'e tam bölünmez, doğru toplam $3 \cdot 61 = 183$'tür. Diğer seçeneklerde sonuçlar $3 \cdot 18$, $3 \cdot 33$ ve $3 \cdot 106$'ya eşittir.

Notlarım